



Árbol bronquial



CMM Edu
Laboratorio de Educación
Centro de Modelamiento
Matemático



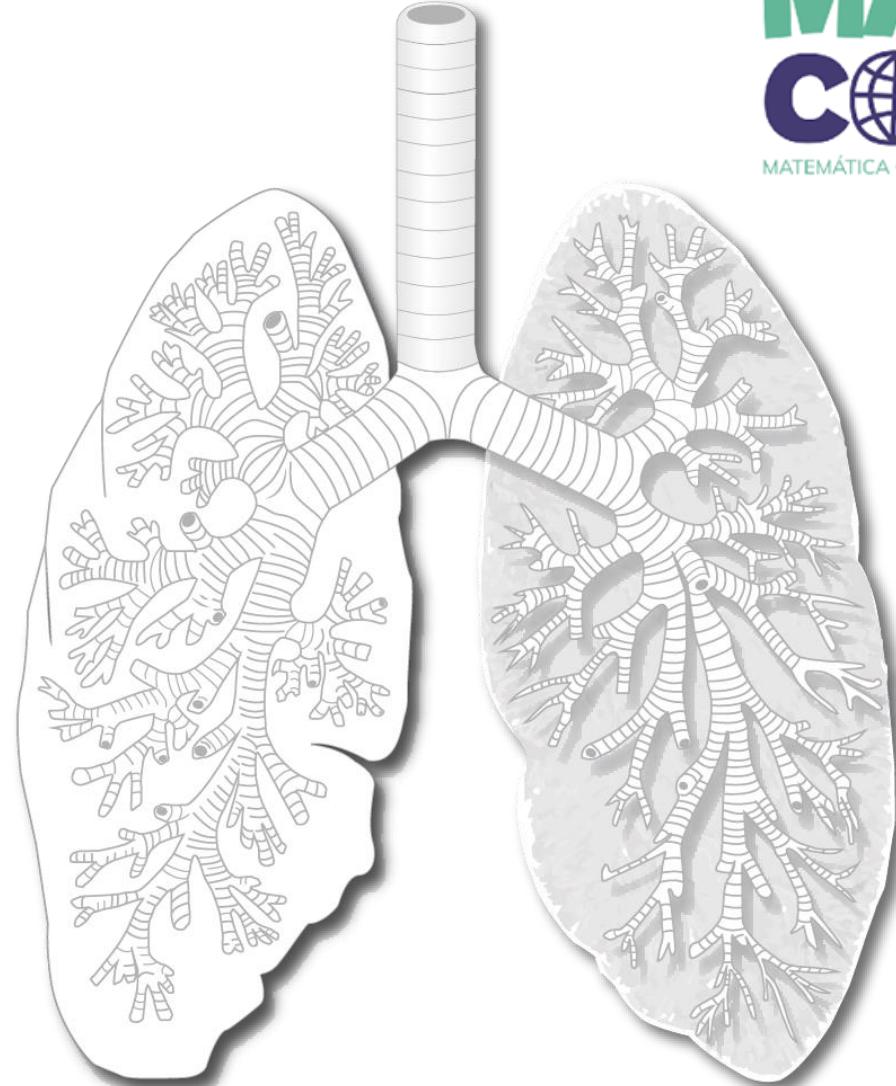
Árbol bronquial

Revisemos el video “¿Qué es el árbol bronquial?”.



Árbol bronquial

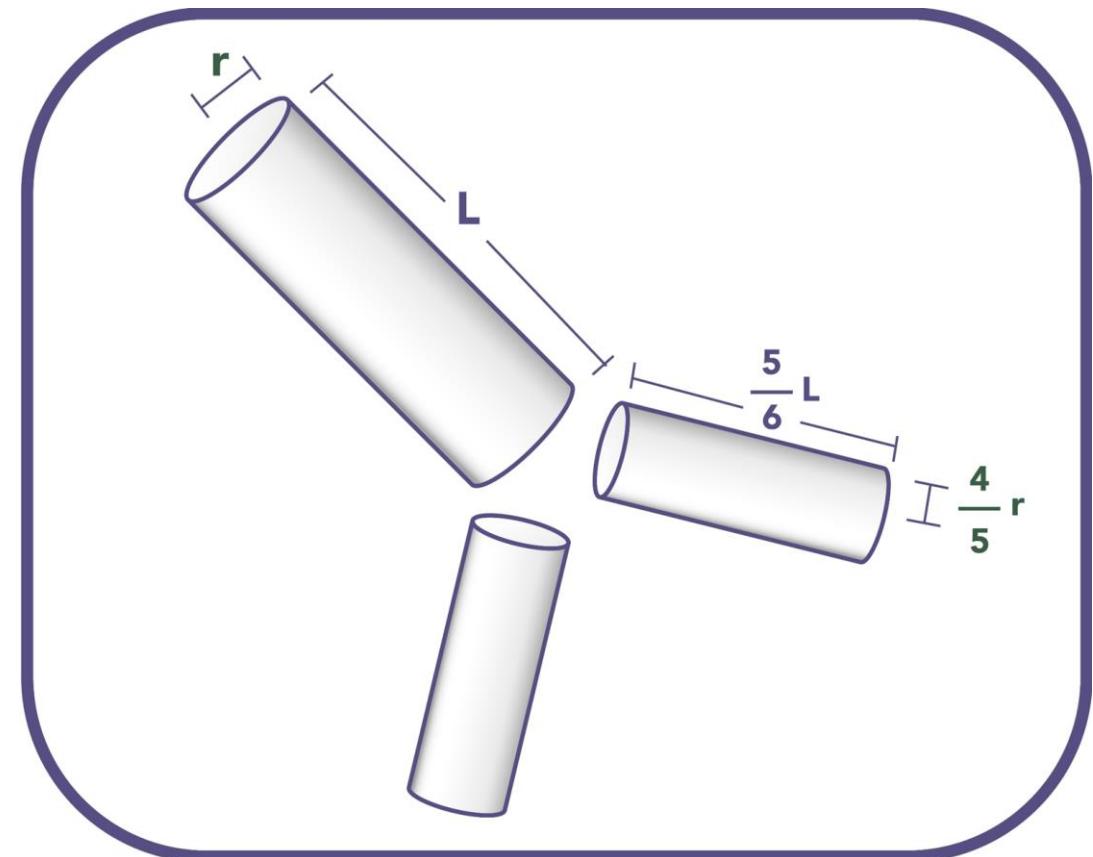
- ¿Podrían describir la estructura del árbol bronquial? ¿Cuántas bifurcaciones existen en él? ¿Cómo se denominan esas bifurcaciones?
- De acuerdo con el video, ¿cómo se pueden modelar los bronquiolos?



Árbol bronquial

El modelo del video considera que:

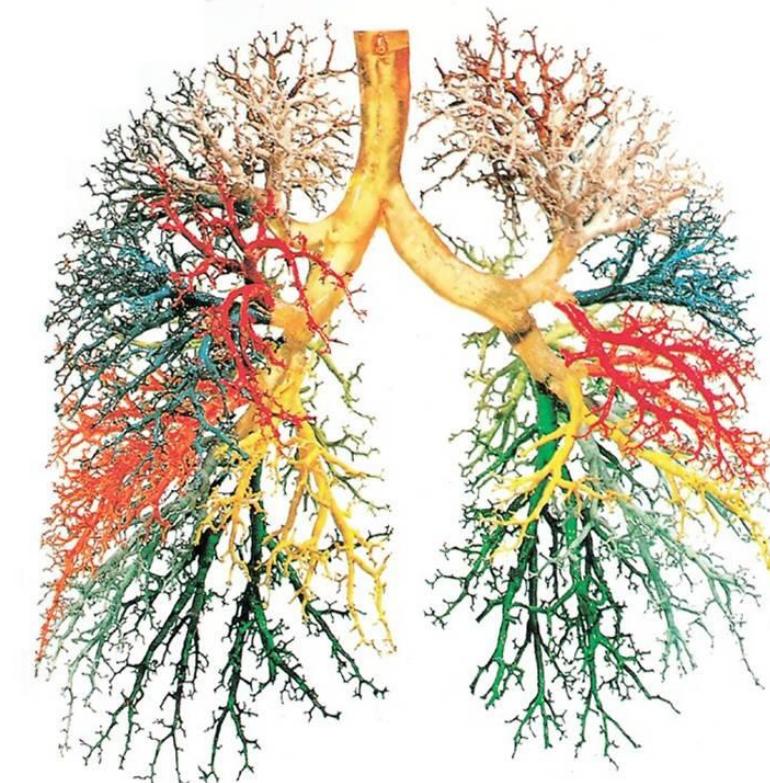
- Los conductos siempre se ramifican en dos.
- Los conductos tienen una forma cilíndrica circular.
- La razón en la que decrecen el largo y radio de los conductos es siempre constante.



Árbol bronquial

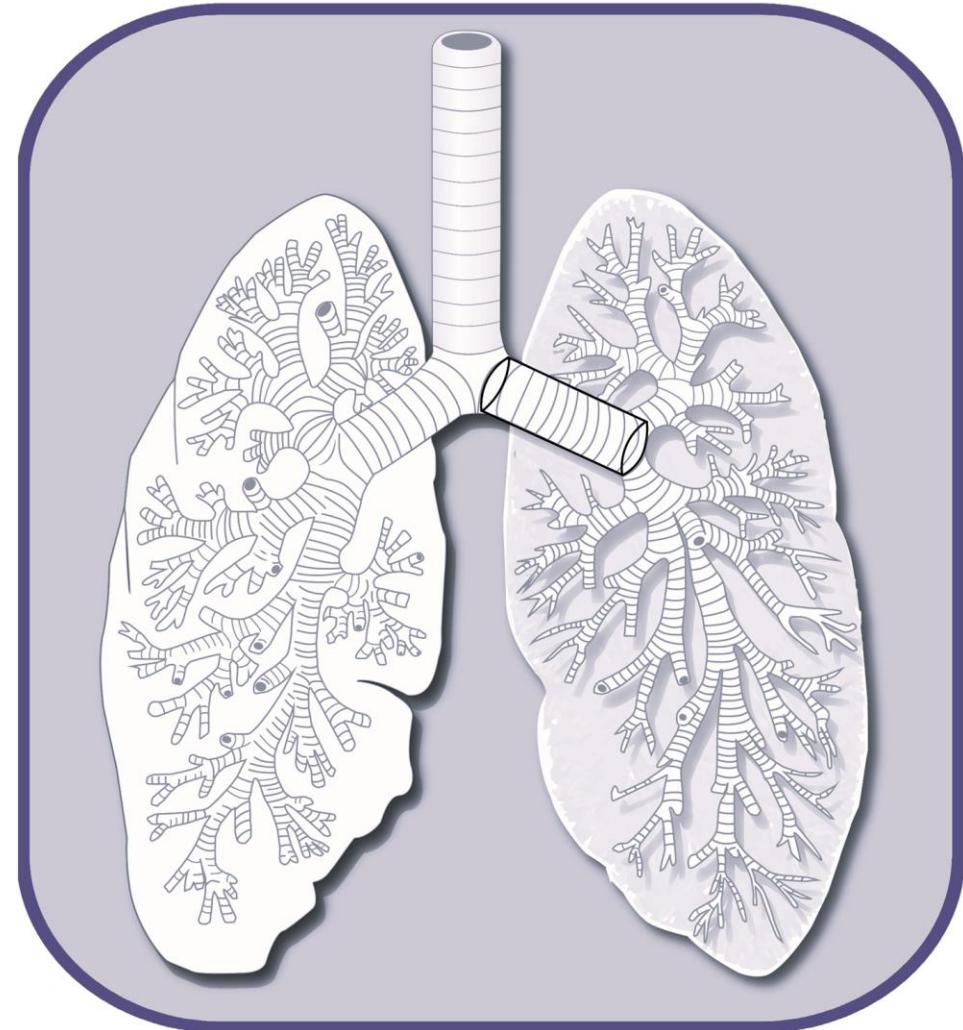
En realidad ocurre que:

- La ramificación en cada generación no es exacta. Puede haber "ramas" más cortas que otras, y en algunos casos pueden surgir 3 conductos a partir de uno anterior.
- Los conductos no tienen una forma exactamente cilíndrica circular.
- La razón en la que decrecen el largo y radio de los conductos no es constante a lo largo del árbol bronquial.



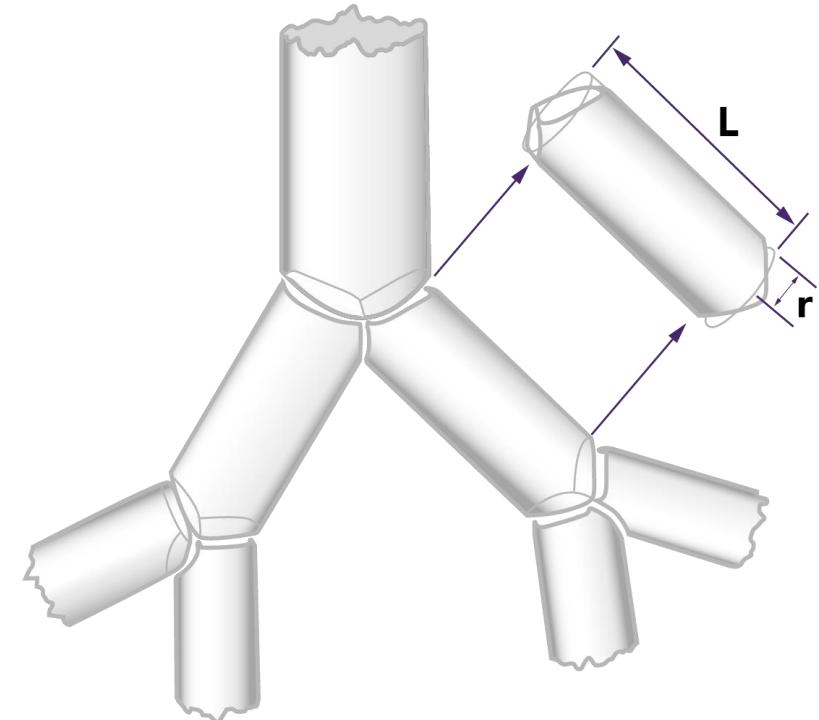
Problema

Si conocemos el tamaño de la tráquea, ¿cómo podemos calcular el largo y radio de los bronquiolos de una determinada generación?



Actividad 1

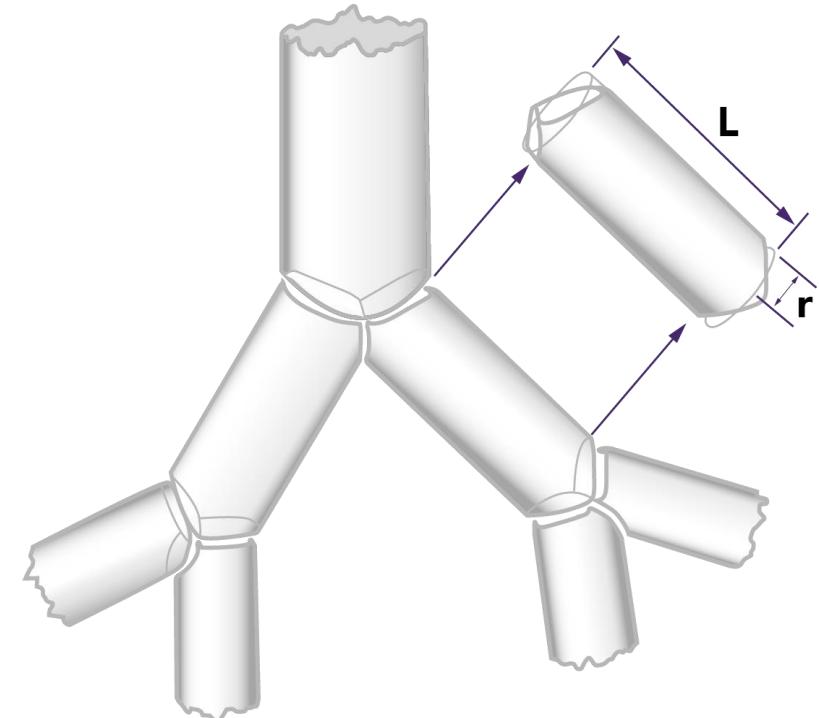
1. De acuerdo al modelo simplificado de árbol bronquial, ¿cuántos conductos hay en cada una de las **primeras cuatro** generaciones?
2. ¿Qué patrón pueden observar en esta secuencia?



Actividad 1

1. De acuerdo al modelo simplificado de árbol bronquial, ¿cuántos conductos hay en cada una de las **primeras cuatro** generaciones?

2. ¿Qué patrón pueden observar en esta secuencia?

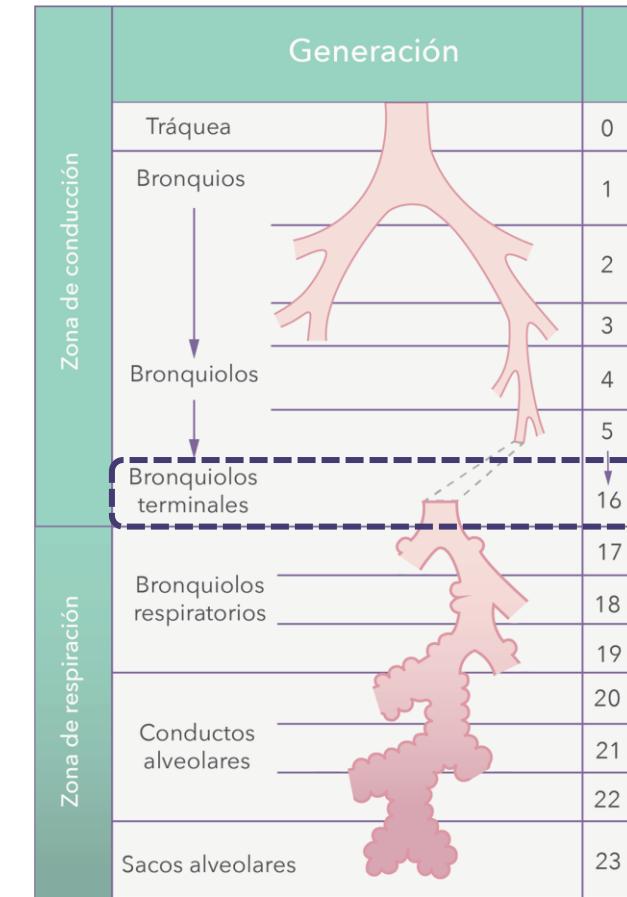


Resp.

1. 1, 2, 4 y 8
2. La cantidad de bronquiolos aumenta al doble en cada generación

Actividad 1

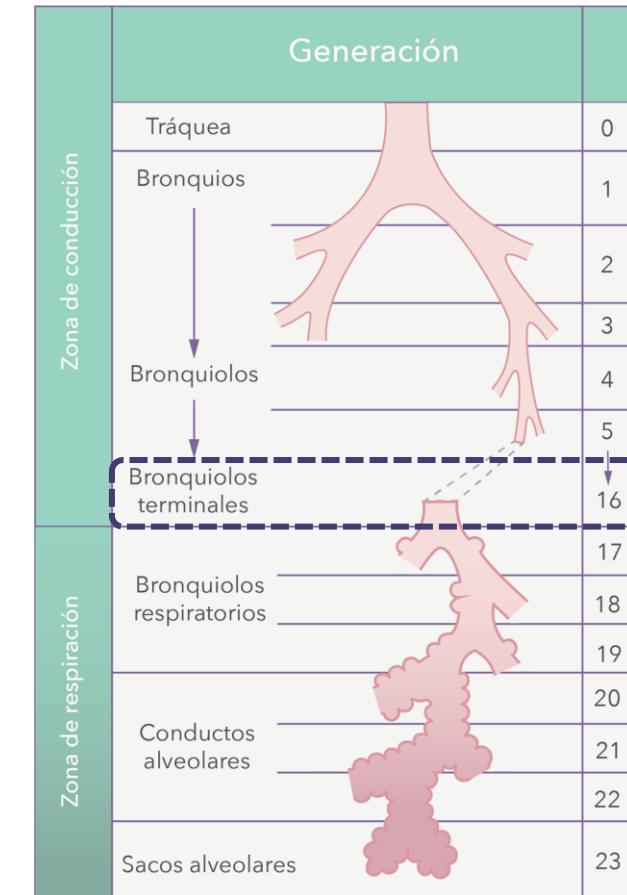
3. ¿Cuántos bronquiolos terminales (los de la generación 16) hay en los pulmones?



Actividad 1

3. ¿Cuántos bronquiolos terminales (los de la generación 16) hay en los pulmones?

Si n representa la generación, ¿Cómo podríamos expresar el número de bronquiolos en la generación n ?



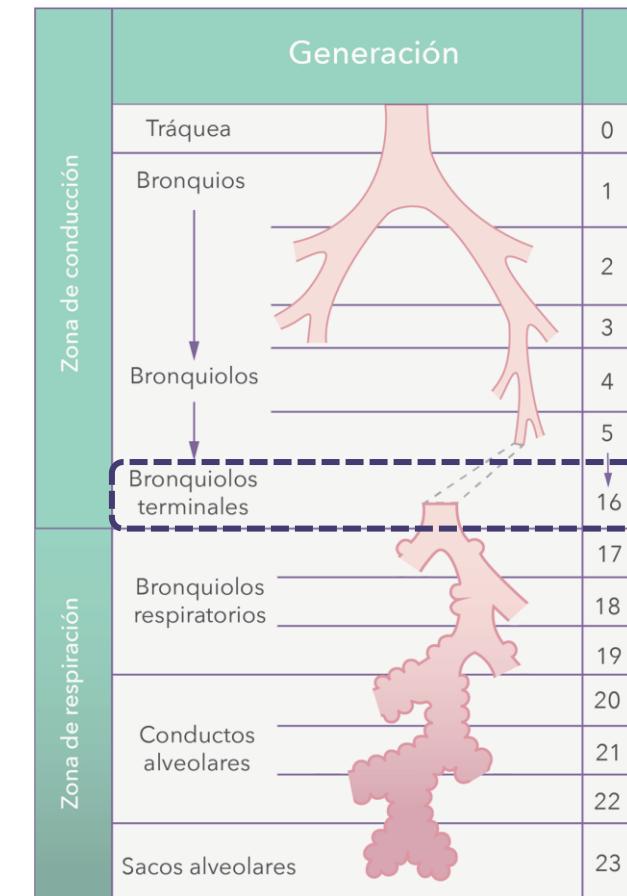
Actividad 1

3. ¿Cuántos bronquiolos terminales (los de la generación 16) hay en los pulmones?

Si n representa la generación, ¿Cómo podríamos expresar el número de bronquiolos en la generación n ?

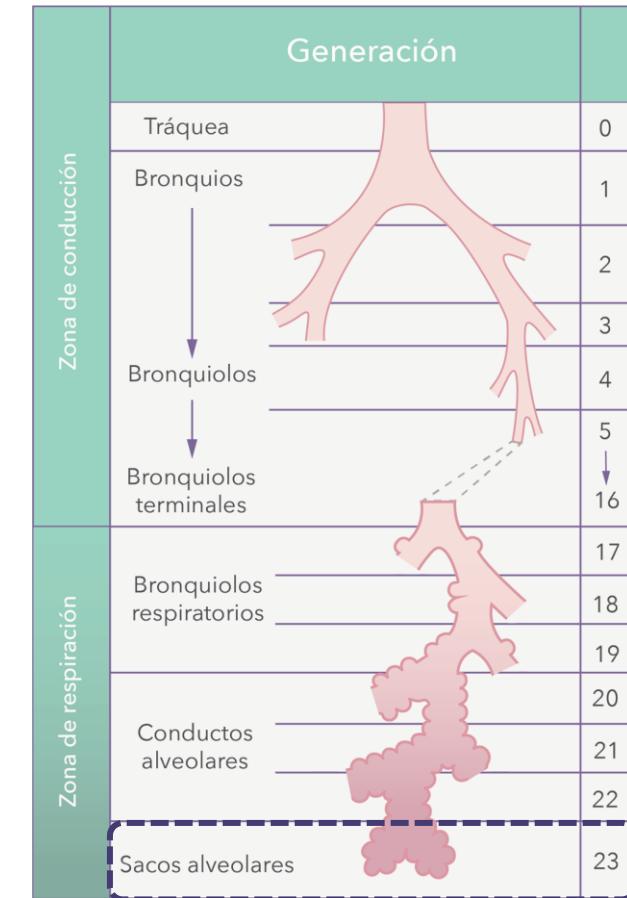
$$\text{nro. broquiolos} = 2^n$$

$$\text{generación 16} \rightarrow 2^{16} = 65\,536$$



Actividad 1

4. ¿Cuántos sacos alveolares (los de la generación 23) hay en los pulmones?

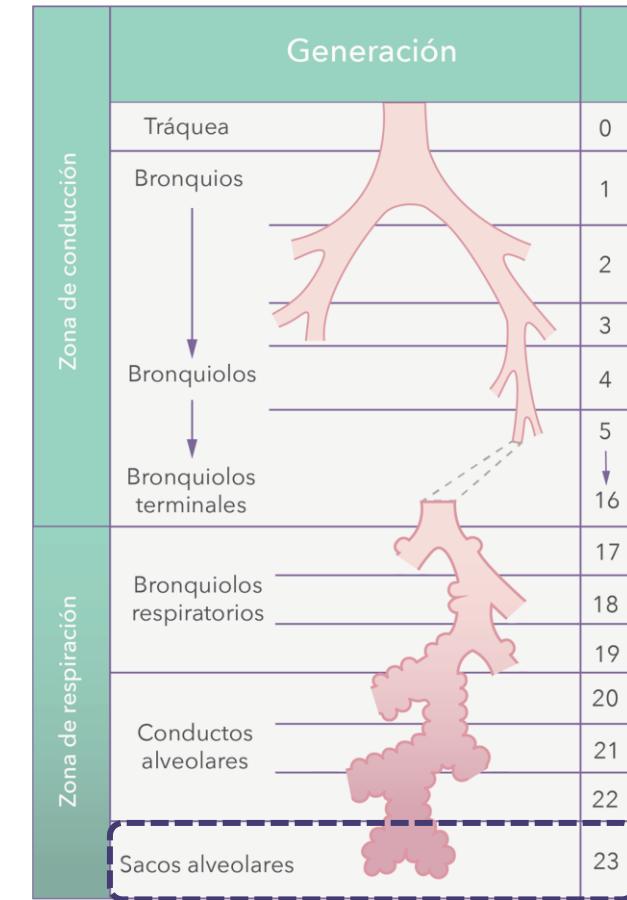


Actividad 1

4. ¿Cuántos sacos alveolares (los de la generación 23) hay en los pulmones?

$$nro.\text{ broquiolos} = 2^n$$

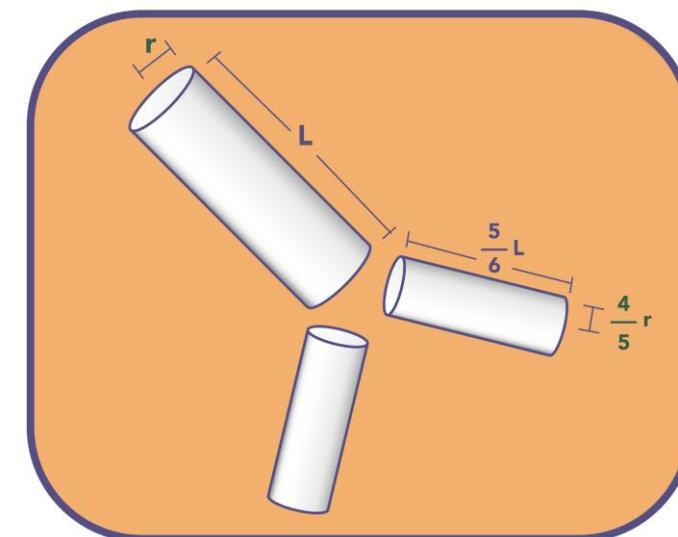
$$\text{generación 23} \rightarrow 2^{23} = 8\,388\,608$$



Actividad 2

- Completen la siguiente tabla con el largo y radio de los bronquiolos hasta la generación 4. Las medidas de la generación 0, corresponden al largo y radio de la tráquea.

Generación	Largo (mm)	Radio (mm)
0	120	9
1	$\frac{5}{6} \cdot 120 = 100$	$\frac{4}{5} \cdot 9 = 7,2$
2	$\frac{5}{6} \cdot 100 = 83,3$	$\frac{4}{5} \cdot 7,2 = 5,76$
3		
4		



Actividad 2

- Completen la siguiente tabla con el largo y radio de los bronquiolos hasta la generación 4. Las medidas de la generación 0, corresponden al largo y radio de la tráquea.

Generación	Largo (mm)	Radio (mm)
0	120	9
1	$\frac{5}{6} \cdot 120 = 100$	$\frac{4}{5} \cdot 9 = 7,2$
2	$\frac{5}{6} \cdot 100 = 83,3$	$\frac{4}{5} \cdot 7,2 = 5,76$
3	$\frac{5}{6} \cdot 83,3 \approx 69,42$	$\frac{4}{5} \cdot 5,76 \approx 4,61$
4	$\frac{5}{6} \cdot 69,42 \approx 57,85$	$\frac{4}{5} \cdot 4,61 \approx 3,69$

Actividad 2

- Completen la siguiente tabla con el largo y radio de los bronquiolos hasta la generación 4. Las medidas de la generación 0, corresponden al largo y radio de la tráquea.

Generación	Largo (mm)	Radio (mm)
0	120	9
1	$\frac{5}{6} \cdot 120 = 100$	$\frac{4}{5} \cdot 9 = 7,2$
2	$\frac{5}{6} \cdot 100 = 83,3$	$\frac{4}{5} \cdot 7,2 = 5,76$
3	$\frac{5}{6} \cdot 83,3 \approx 69,42$	$\frac{4}{5} \cdot 5,76 \approx 4,61$
4	$\frac{5}{6} \cdot 69,42 \approx 57,85$	$\frac{4}{5} \cdot 4,61 \approx 3,69$



Generación	Largo (mm)	Radio (mm)
0	$\left(\frac{5}{6}\right)^0 \cdot 120$	$\left(\frac{4}{5}\right)^0 \cdot 9$
1	$\left(\frac{5}{6}\right)^1 \cdot 120$	$\left(\frac{4}{5}\right)^1 \cdot 9$
2	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 120$	$\left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot 9$
3	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 120$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot 9$
4	$\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot 120$	$\left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot 9$

Actividad 2

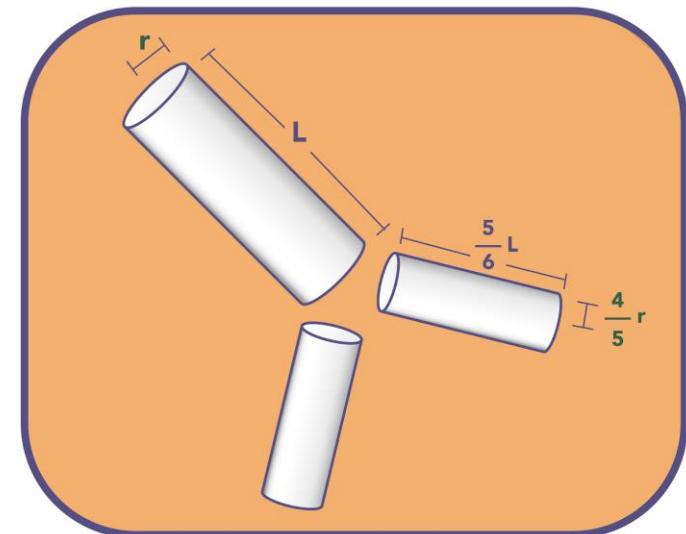
2. ¿Cuál es el largo y radio de los bronquiolos terminales (generación 16)?
3. ¿Cuál es el volumen total de los bronquiolos terminales?

Actividad 2

2. ¿Cuál es el largo y radio de los bronquiolos terminales (generación 16)?
3. ¿Cuál es el volumen total de los bronquiolos terminales?

$$\text{Largo generación } n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot 120 \quad \Rightarrow L = \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot 120 \approx 6,5 \text{ mm}$$

$$\text{Radio generación } n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot 9 \quad \Rightarrow R = \left(\frac{4}{5}\right)^{16} \cdot 9 \approx 0,25 \text{ mm}$$

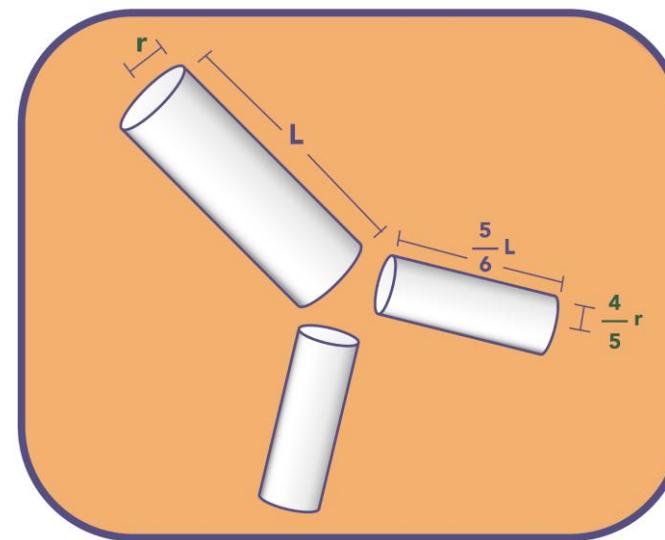


Actividad 2

2. ¿Cuál es el largo y radio de los bronquiolos terminales (generación 16)?
3. ¿Cuál es el volumen total de los bronquiolos terminales?

Volumen cilindro : $\pi \cdot R^2 \cdot L$

¿Cuál es la expresión para el volumen **de un bronquiolo** de la generación 16?



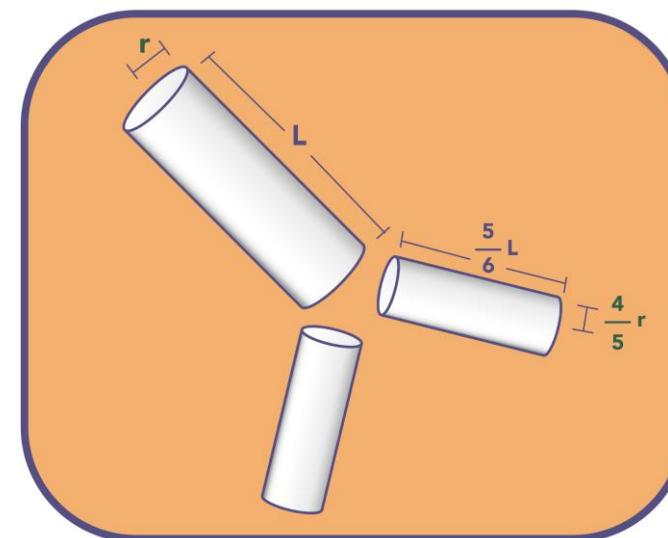
Actividad 2

2. ¿Cuál es el largo y radio de los bronquiolos terminales (generación 16)?
3. ¿Cuál es el volumen total de los bronquiolos terminales?

Volumen cilindro : $\pi \cdot R^2 \cdot L$

¿Cuál es la expresión para el volumen **de un bronquiolo** de la generación 16?

$$V_b = \pi \cdot \left[\left(\frac{4}{5} \right)^{16} \cdot 9 \right]^2 \cdot \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{16} \cdot 120 \right]$$

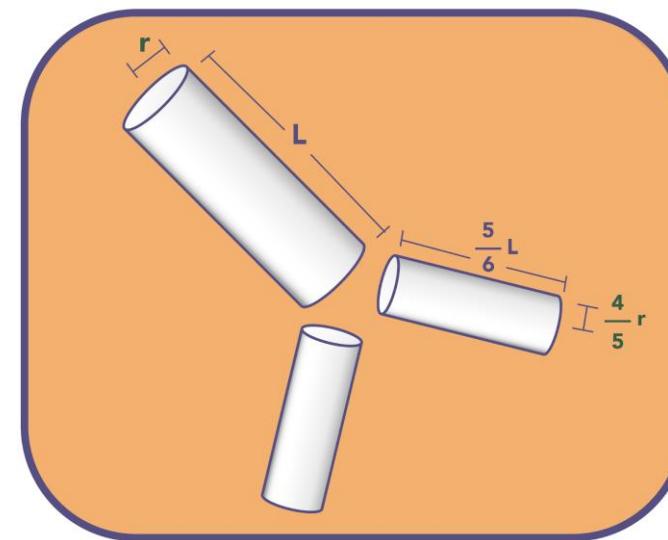


Actividad 2

2. ¿Cuál es el largo y radio de los bronquiolos terminales (generación 16)?
3. ¿Cuál es el volumen total de los bronquiolos terminales?

Volumen cilindro : $\pi \cdot R^2 \cdot L$

¿Cómo se puede calcular el volumen **de todos los bronquiolos** de la generación 16?



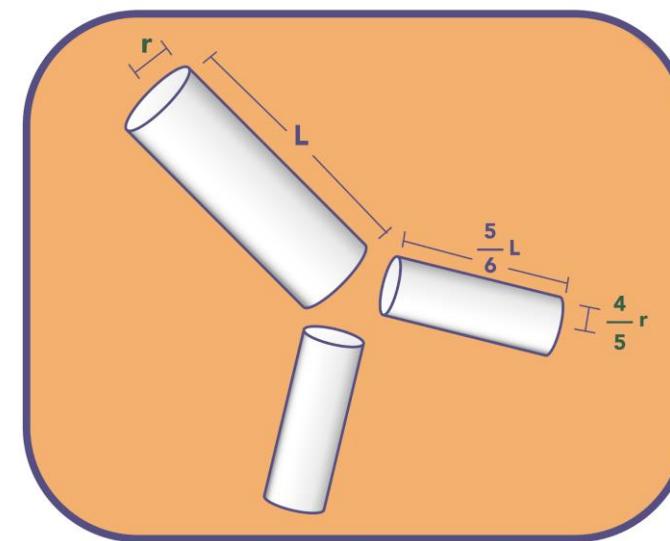
Actividad 2

2. ¿Cuál es el largo y radio de los bronquiolos terminales (generación 16)?
3. ¿Cuál es el volumen total de los bronquiolos terminales?

Volumen cilindro : $\pi \cdot R^2 \cdot L$

¿Cómo se puede calcular el volumen **de todos los bronquiolos** de la generación 16?

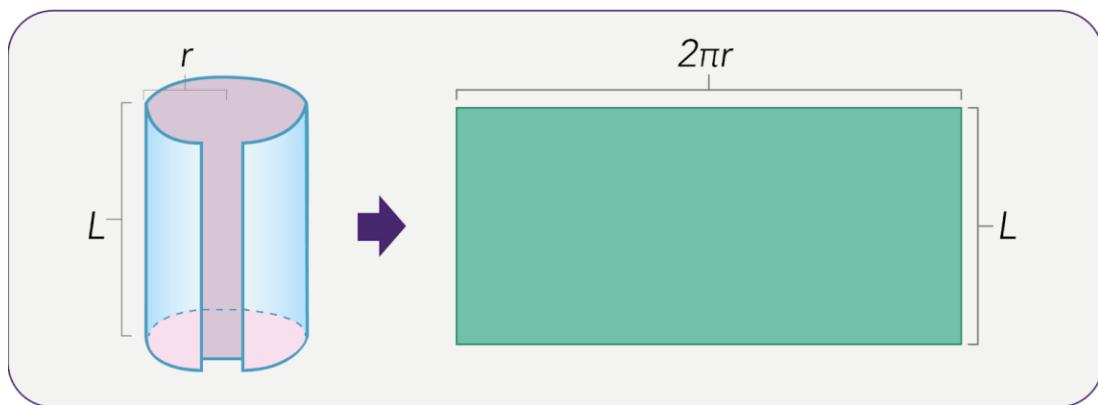
$$V_T = 2^{16} \cdot \pi \cdot \left[\left(\frac{4}{5} \right)^{16} \cdot 9 \right]^2 \cdot \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{16} \cdot 120 \right]$$



Actividad 2

4. ¿Cuál es el área total de los bronquiolos terminales?

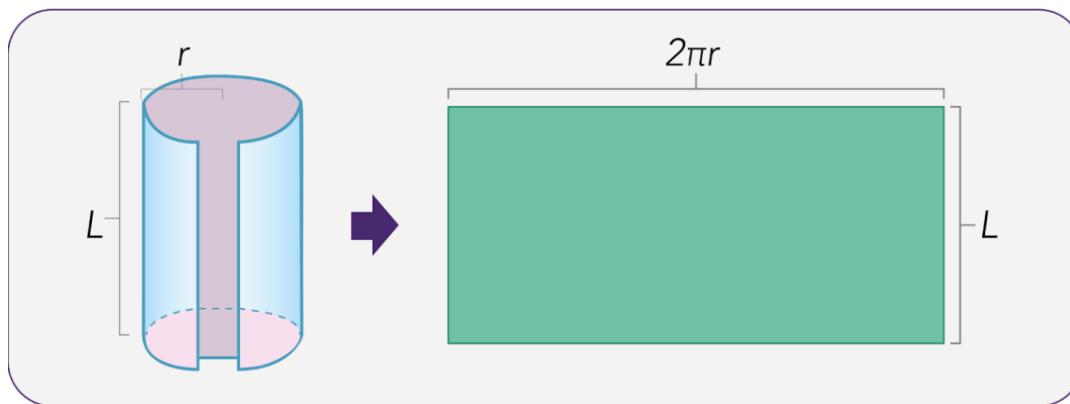
Área lateral : $2 \cdot \pi \cdot R \cdot L$



Actividad 2

4. ¿Cuál es el área total de los bronquiolos terminales?

$$\text{Área lateral} : 2 \cdot \pi \cdot R \cdot L$$



- Si L es el largo del bronquiolo y R es su radio, ¿cómo se puede expresar su área?
- ¿Cuál es el área de un bronquiolo de la generación 16?
- Considerando lo anterior, ¿cómo se puede calcular la superficie total de todos los bronquiolos de la generación 16?

Actividad 2

4. ¿Cuál es el área total de los bronquiolos terminales?

Área lateral : $2 \cdot \pi \cdot R \cdot L$

$$A_b = 2 \cdot \pi \cdot \left[\left(\frac{4}{5} \right)^{16} \cdot 9 \right] \cdot \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{16} \cdot 120 \right]$$

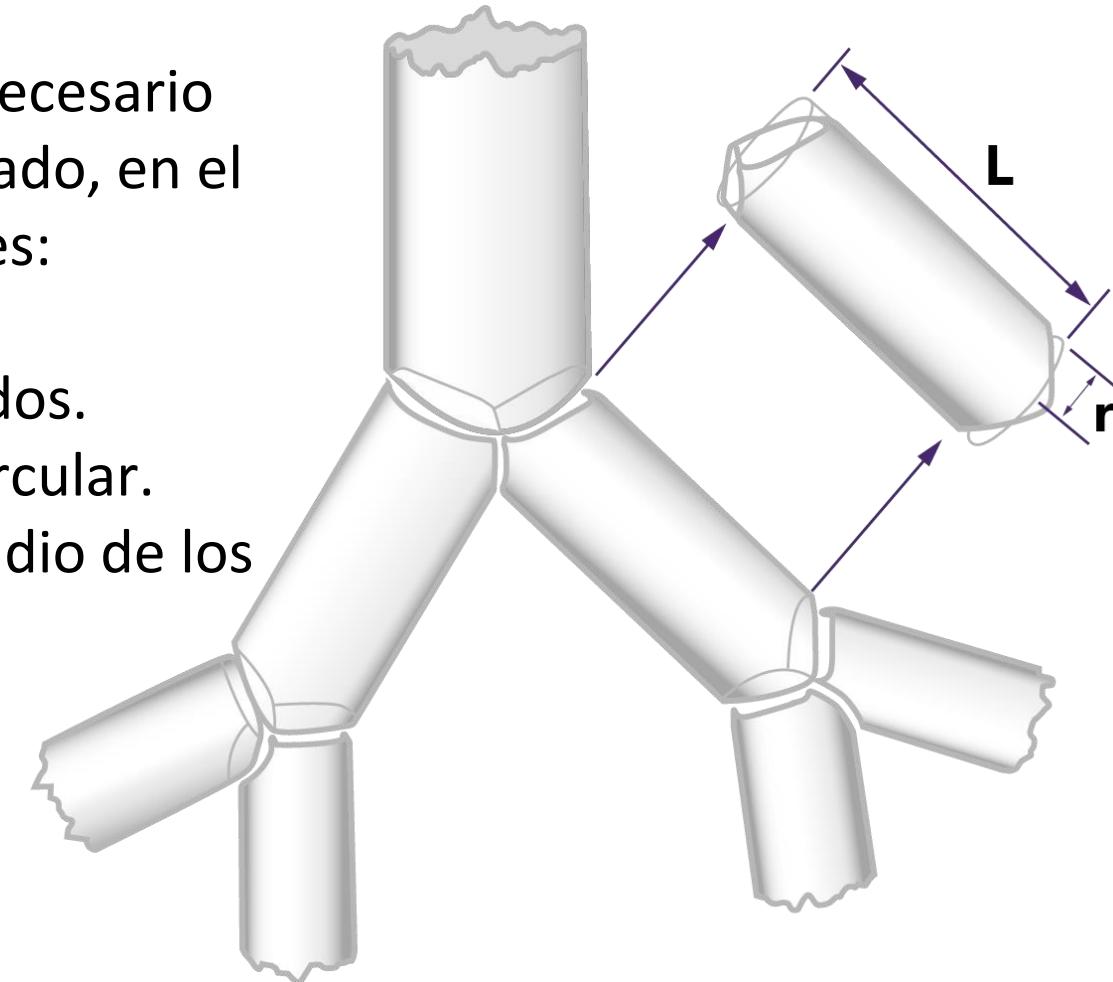
$$A_T = 2^{16} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[\left(\frac{4}{5} \right)^{16} \cdot 9 \right] \cdot \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{16} \cdot 120 \right]$$

- Si L es el largo del bronquiolo y R es su radio, ¿cómo se puede expresar su área?
- ¿Cuál es el área de un bronquiolo de la generación 16?
- Considerando lo anterior, ¿cómo se puede calcular la superficie total de todos los bronquiolos de la generación 16?

Conclusiones

1. Para poder dar respuesta al problema fue necesario establecer un modelo matemático simplificado, en el que se debieron suponer condiciones ideales:

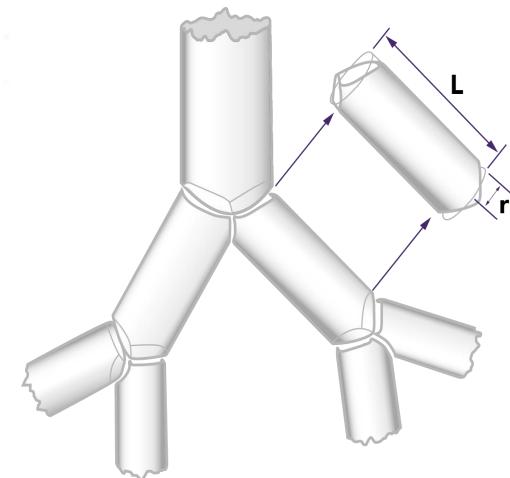
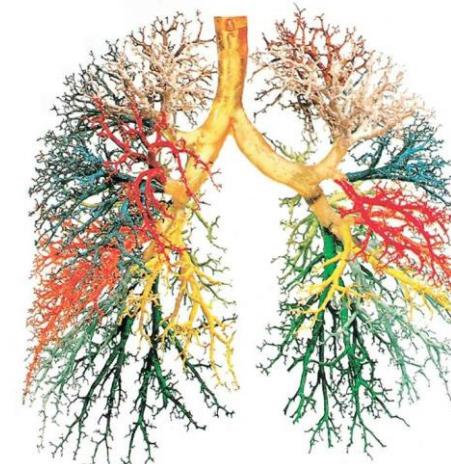
- Los conductos siempre se ramifican en dos.
- Los conductos tienen forma cilíndrica circular.
- La razón en la que decrecen el largo y radio de los conductos es siempre constante.



Conclusiones

1. Para poder dar respuesta al problema fue necesario establecer un modelo matemático simplificado, en el que se debieron suponer condiciones ideales:

- Los conductos siempre se ramifican en dos.
- Los conductos tienen forma cilíndrica circular.
- La razón en la que decrecen el largo y radio de los conductos es siempre constante.



Conclusiones

2. En el cálculo del número, área y volumen de los bronquiolos hay involucradas potencias de base racional y exponente entero.
3. Sabiendo que en cada generación el largo y radio de un bronquio se reducen a $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{5}$ del largo y radio del bronquio de la generación anterior, pudimos determinar que:



- Nro de bronquiolos en la generación n es 2^n
- El área total de los bronquiolos de la generación n es $A_T = 2^{16} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{16} \cdot 9 \right] \cdot \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot 120 \right]$
- El volumen total de los bronquiolos de la generación n es $V_T = 2^{16} \cdot \pi \cdot \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{16} \cdot 9 \right]^2 \cdot \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot 120 \right]$



Árbol bronquial



CMM Edu
Laboratorio de Educación
Centro de Modelamiento
Matemático

