MAT CON

MATEMÁTICA CONECTADA

Antenas Fractales

fcfm FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMMEdu Laboratorio de Educación Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación

REACTIVACIÓN EDUCATIVA

Revisemos el video de esta situación

MATEMÁTICA CONECTADA

"Antenas Fractales"

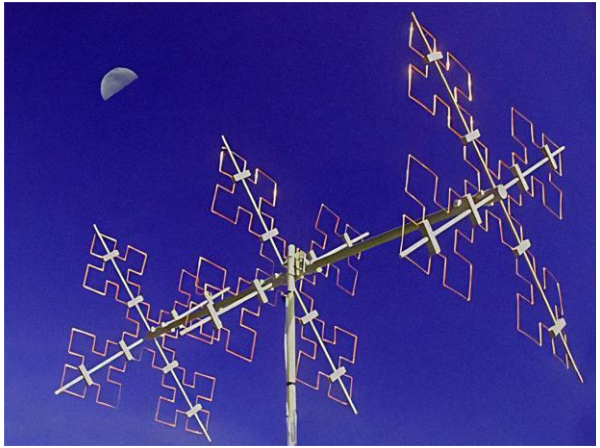


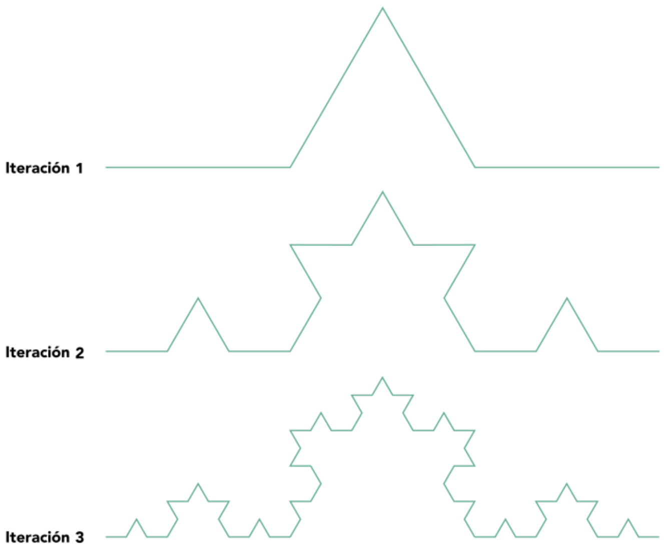
Imagen referencial de la situación

A partir del video, respondamos

MATEMÁTICA CONECTADA

- ¿Qué significa que los fractales tengan autosimilaridad?
- ¿Por qué se dice que las estructuras fractales optimizan la superficie o el espacio que ocupan? Justifica tu respuesta usando el ejemplo de las antenas.

Presentación del problema



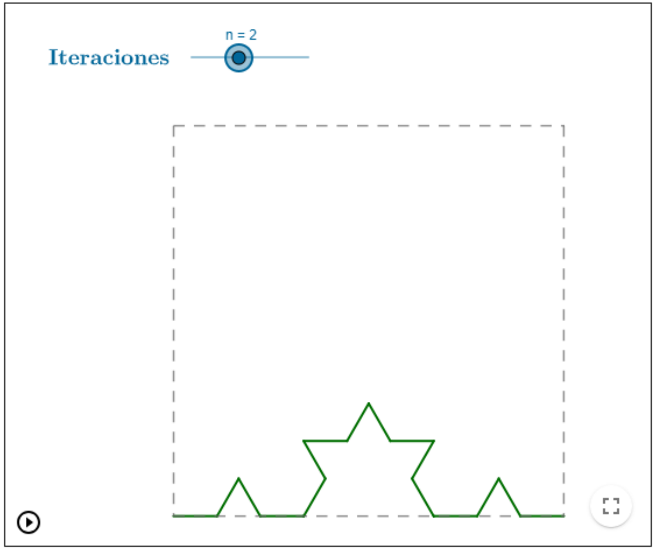
Una empresa dedicada a la fabricación de celulares está evaluando la posibilidad de utilizar un diseño fractal para las antenas de sus dispositivos. Actualmente están analizando la siguiente geometría fractal para diseñar las antenas,

Para poder llevar a cabo un correcto proceso de fabricación, la empresa necesita conocer cuál es el largo de la antena para cualquier iteración.

Actividad 1

Reflexionemos

Recurso GeoGebra

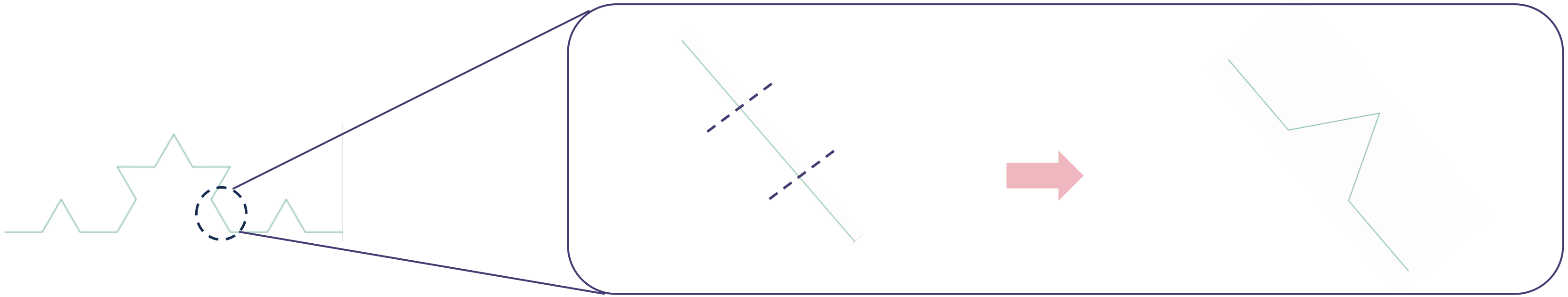


- ¿Qué acciones se realizan a la iteración 0 para generar la iteración 1?
- ¿Qué acciones se realizan a la iteración 1 para generar la iteración 2?
- Indica una regla de conformación del fractal. Es decir, indica que acciones se deben realizar para pasar de una iteración a la siguiente.

Actividad 1

Reflexionemos

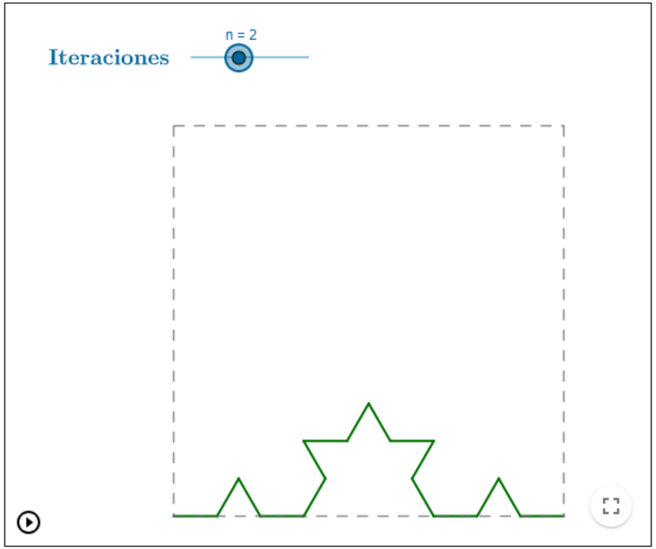
Indica una regla de conformación del fractal. Es decir, indica que acciones se deben realizar para pasar de una iteración a la siguiente.



Para pasar de cada iteración a la siguiente se subdivide cada segmento en tres segmentos equiláteros, y en cada uno de ellos se reemplaza el segmento central por dos lados de un triángulo equilátero cuya base corresponde al segmento central que se ha removido.

Actividad 2
Reflexionemos

Recurso GeoGebra



- ¿Qué ocurre con la longitud del fractal a medida que aumenta el número de iteraciones?
- Si el número de iteraciones continúa aumentando, ¿la curva se mantendrá dentro de la región rectangular? Justifica por qué esto sería importante para el desarrollo de una antena.

Actividad 3

a. **Completa la siguiente tabla.**

Iteración 0

**Considera que a la iteración 0 tiene una longitud igual a 1 unidad*

N° iteración	0	1	2	3	4	5
Longitud del fractal						

Actividad 3

1. **Completa la siguiente tabla.**

Iteración 0

**Considera que a la iteración 0 tiene una longitud igual a 1 unidad*

N° iteración	0	1	2	3	4	5
Longitud del fractal	1	4/3	16/9	64/27	256/81	1024/243

Actividad 3

b. A partir de la tabla conjetura una expresión que representa la longitud del fractal después de n iteraciones. Justifica tu expresión.

Actividad 3

b. A partir de la tabla conjetura una expresión que representa la longitud del fractal después de n iteraciones. Justifica tu expresión.

Longitud
del fractal después
de *n* iteraciones

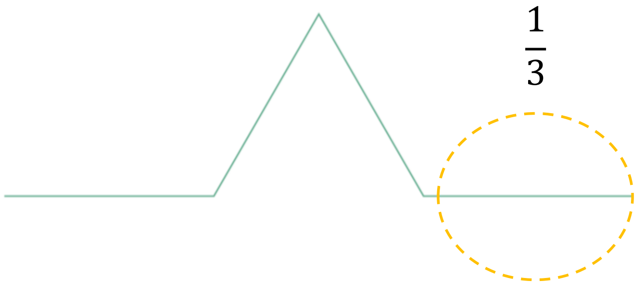
$$\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Actividad 3

Como el largo inicial en la iteración 0 es de 1 unidad, en la primera iteración se obtienen 4 segmentos de longitud igual a $\frac{1}{3}$

Iteración 0

Iteración 1

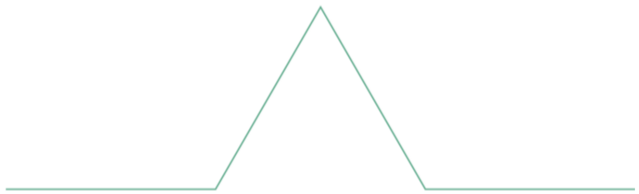


Largo total 1° iteración = $4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

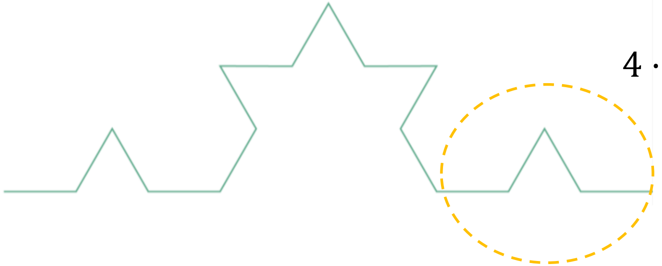
Actividad 3

En la segunda iteración, cada uno de los 4 segmentos de largo igual a $\frac{1}{3}$ unidades se descompone en 4 segmentos cuyo largo es $\frac{1}{3}$ de la longitud de los segmentos de la etapa anterior (es decir, $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$) , como se observa a continuación,

Iteración 1



Iteración 2



$$4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

Largo total 2° iteración = $4 \cdot \left[4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right] = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

Actividad 3

Podemos constatar que, dada la regla de conformación del fractal, **cada nueva iteración** crea 4 veces más segmentos que en la iteración anterior, y que la longitud de cada uno de ellos es $\frac{1}{3}$ **de la longitud de los segmentos de la etapa anterior.** Es decir, el largo de la antena **aumenta por un factor de $\frac{4}{3}$ en cada iteración**, por tanto, su largo en una iteración *n* está dado por,

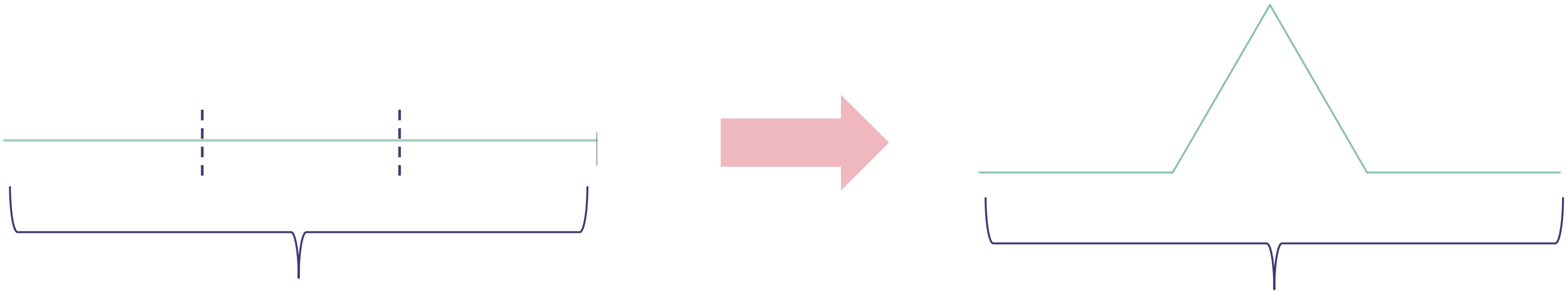
$$L(n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Actividad 3

c. **Si la longitud del segmento en la iteración es de *a* unidades, ¿cuál es la expresión que representa la longitud del fractal después de iteraciones?**

Actividad 3

c. **Si la longitud del segmento en la iteración es de *a* unidades, ¿cuál es la expresión que representa la longitud del fractal después de iteraciones?**

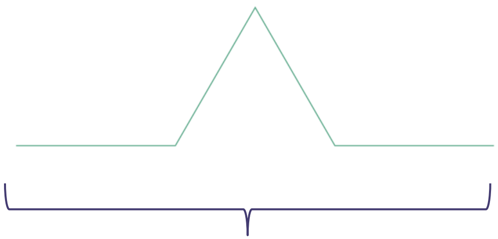


$$a$$

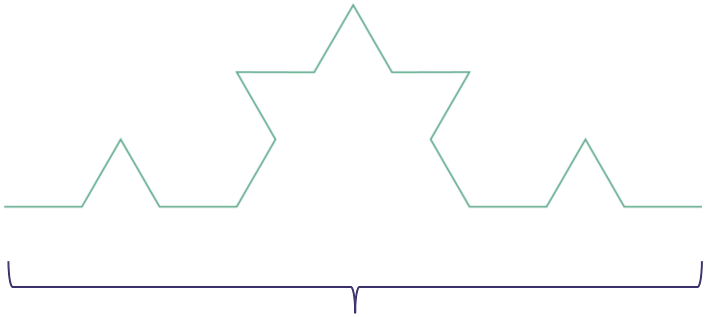
$$\frac{4}{3} \cdot a$$

Actividad 3

c. **Si la longitud del segmento en la iteración es de *a* unidades, ¿cuál es la expresión que representa la longitud del fractal después de iteraciones?**



$$\frac{4}{3} \cdot a$$



$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot a$$

Actividad

c. Si la longitud del segmento en la iteración es de *a* unidades, ¿cuál es la expresión que representa la longitud del fractal después de iteraciones?

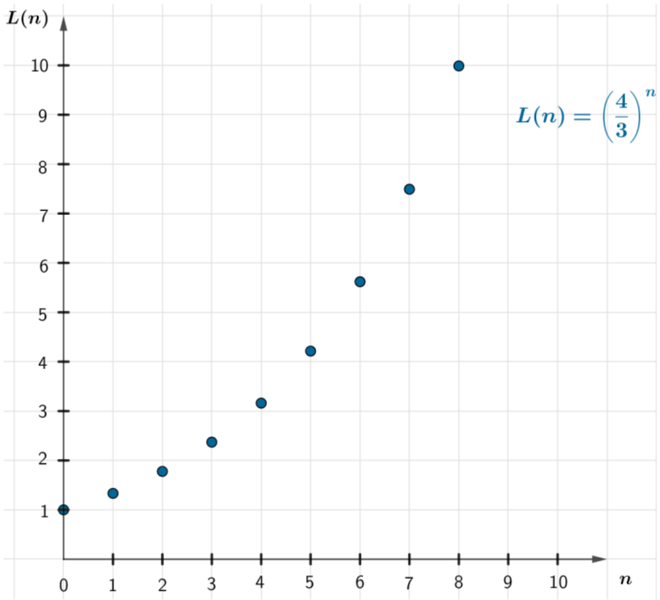
Longitud
del fractal después
de *n* iteraciones

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot a$$

Algunas conclusiones

La longitud del fractal en función del número de iteraciones se modela por medio de **una función exponencial**. Esto quiere decir que, en cada iteración, **el largo aumenta por un factor constante, en este caso $\frac{4}{3}$**. Esta característica conduce a que la longitud de la antena crezca bastante en pocas iteraciones.

Esto es especialmente útil en el contexto de las antenas fractales, pues una mayor longitud en la antena se traduce en una mayor capacidad para recibir señales.



Actividad 4

MAT CON
MATEMÁTICA CONECTADA

En una de sus primeras pruebas de fabricación, la empresa ha considerado un largo inicial de 5 mm,

a. En base a tus respuestas a la actividad anterior, escribe la expresión general que determina el largo de la antena en función del número de iteraciones.

b. ¿Cuál es el largo de la antena después de 10 iteraciones?

c. Si se quiere que cada antena tenga una longitud total de 50 cm (es decir, 500 mm), ¿Cuántas iteraciones se deben considerar en el proceso de fabricación?

d. Grafica la función. Considera hasta 6 iteraciones. Recuerda que el número de iteraciones es un número natural.

Actividad

a. En base a tus respuestas a la actividad anterior, escribe la expresión general que determina el largo de la antena en función del número de iteraciones.

b. ¿Cuál es el largo de la antena después de 10 iteraciones?

$$a.\quad L(n) = \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \cdot 5$$

$$b.\quad L(10) = \left(\frac{4}{3}\right)^{10} \cdot 5 \approx 88{,}79\, mm$$

Actividad 4

c. Si se quiere que cada antena tenga una longitud total de 50 cm (es decir, 500 mm), ¿Cuántas iteraciones se deben considerar en el proceso de fabricación?

$$L(15) = \left(\frac{4}{3}\right)^{15} \cdot 5 \approx 374{,}15\, mm$$

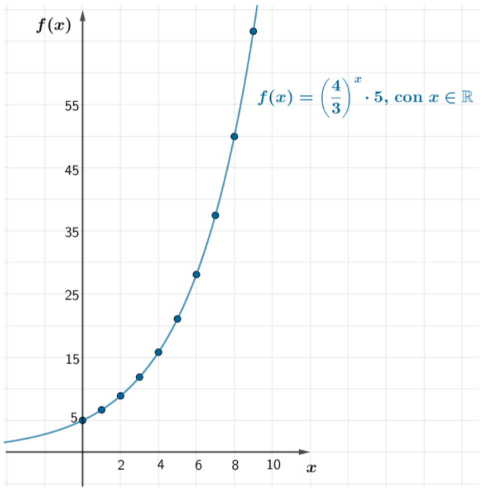
$$L(16) = \left(\frac{4}{3}\right)^{16} \cdot 5 \approx 498{,}89\, mm$$

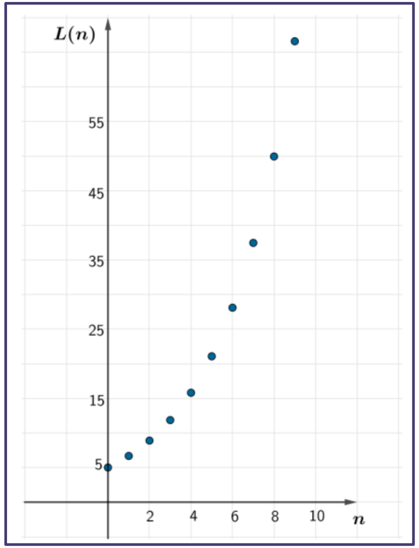
$$L(17) = \left(\frac{4}{3}\right)^{17} \cdot 5 \approx 665{,}16{,}15\, mm$$

Se requieren un mínimo de 16 iteraciones

Actividad

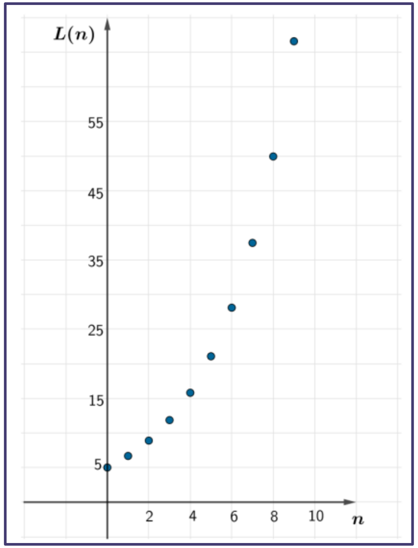
d. Grafica la función. Considera hasta 6 iteraciones. Recuerda que el número de iteraciones es un número natural.





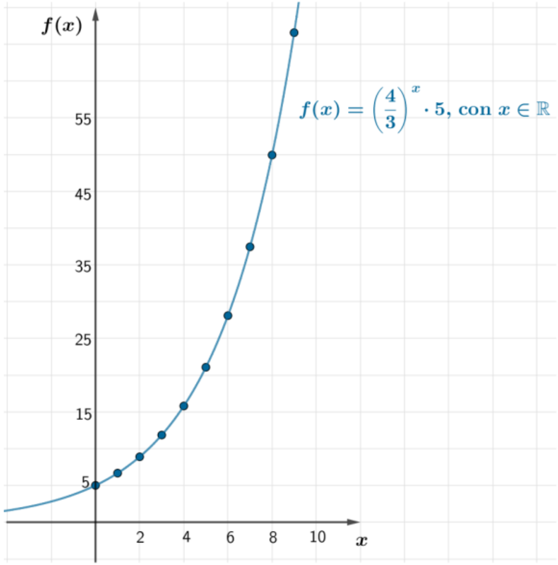
Actividad 4

d. Grafica la función. Considera hasta 6 iteraciones. Recuerda que el número de iteraciones es un número natural.



La gráfica corresponde a una colección discreta de puntos, dado el contexto del problema (las iteraciones van de 1 en 1)

Actividad 4



La función $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot 5$ con x en los números reales, da lugar a una curva continua que contiene a los puntos de las iteraciones.

Conclusiones

- Comprender cómo variaba la longitud de la antena con cada cambio de iteración fue fundamental para establecer un modelo que describiera una relación funcional entre ambas variables. Para lograr esta comprensión, en esta clase fue necesario,

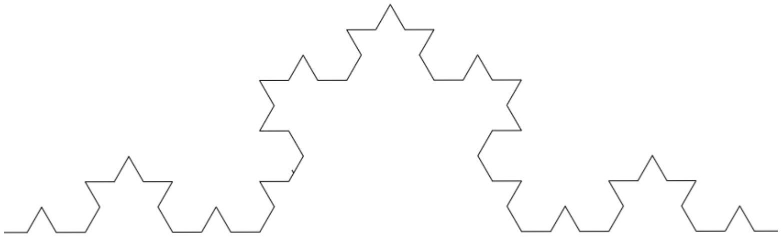
a. Estudiar el fractal e identificar su regla geométrica de conformación

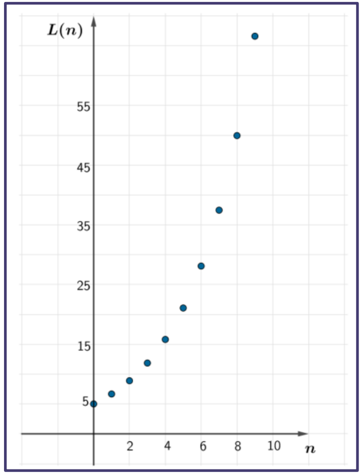
a. Trabajar con tablas de valores, para conjeturar una regla general que dé cuenta de la longitud del fractal en función del número de iteraciones.

b. Justificar, basados en la regla de conformación del fractal, porque la fórmula conjetura es correcta

Conclusiones

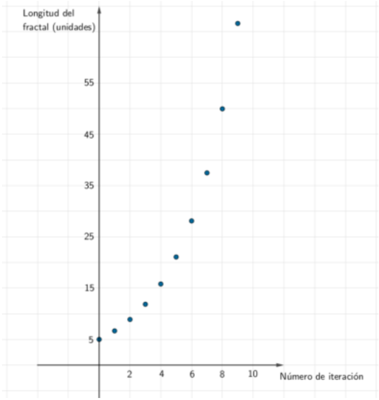
- La representación gráfica brinda una visualización del comportamiento de la longitud a medida que se incrementan las iteraciones. Considerando nuestro contexto, la gráfica debe ser una colección discreta de puntos dada por los valores de cada iteración.





Conclusiones

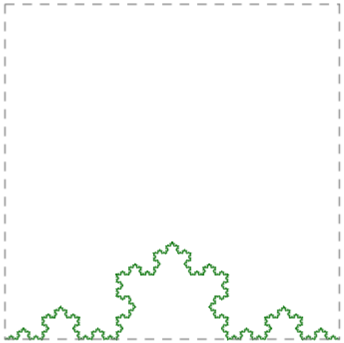
- El modelo que describe la longitud del fractal de la situación es un **modelo exponencial**, en el que la longitud **aumenta por un factor constante, en este caso $\frac{4}{3}$ con cada iteración**, evidenciando un crecimiento no acotado a medida que aumenta el número de iteraciones



$$L(n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot a$$

Conclusiones

- Las distintas iteraciones del fractal se mantienen dentro de una región acotada del plano. Esta característica resulta beneficiosa en el contexto de antenas fractales, ya que una longitud mayor contribuye a una mayor capacidad para recibir señales e independientemente de la longitud, la antena puede ocupar espacios pequeños como los espacios disponibles en aparatos móviles.



Antenas Fractales