

SITUACIONES TIPO PROYECTO

Una posible respuesta - Geometría 3D



1. Introducción

En el siguiente documento encontrarás algunas posibles respuestas que pueden ser entregadas por las y los estudiantes a lo largo de las distintas etapas del proyecto.

Es relevante recordar que las y los estudiantes podrían seguir otros caminos de resolución distintos a los planteados en esta guía, dadas las características del problema que motiva este proyecto. En ese sentido, las respuestas que se presentan aquí tienen como objetivo ilustrar posibles producciones de las y los estudiantes en cada etapa del proyecto, pero no debe considerarse como la única respuesta posible al problema.

Esperamos que este documento sea de utilidad para planificar el trabajo de proyecto, por cuanto puede ayudar a identificar otras estrategias de resolución que podrían seguir las y los estudiantes en las distintas etapas.

2. Etapas del Proyecto

2.1. Desafío

A continuación se presentan las respuestas esperadas a las preguntas de la etapa de Desafío. Ellas tienen por objetivo asegurar la comprensión de la situación expuesta en el video, y extender dicha comprensión a otro contexto. Con esto último se busca motivar la hipótesis de que los adultos tienen menos riesgo de sufrir hipotermia que los niños, a partir de la cual se elaborará el desafío que guiará el desarrollo del proyecto:

¿Cómo podemos probar que las personas adultas tienen menor riesgo de sufrir hipotermia que los niños en un clima frío?

- *¿Cuál es la situación que se presenta en el video?*

Se espera que las y los estudiantes mencionen las diferencias que existen entre los mamíferos y aves en distintas latitudes. Aquí es importante que logren identificar que los animales son más pequeños en zonas cálidas, mientras que son más grandes en zonas frías. Es posible que algunos estudiantes mencionen la evolución y adaptación que sufren los animales al vivir en climas distintos.

- *¿Por qué creen que ocurre este fenómeno?*

Las y los estudiantes deben señalar las diferencias de los entornos en los que se encuentran los ejemplos presentados en el video. Es esperable que el aspecto que más noten sea la diferencia de temperatura de ambos entornos, aunque también podrían señalar otros aspectos como la humedad, falta de vegetación, entre otros.

- *¿Qué pasaría si los dos pingüinos están en el mismo ambiente?*

Al presentar esta pregunta, las y los estudiantes empezarán a realizar conjeturas y es muy probable que utilicen su propia experiencia para tratar de entender qué ocurriría en el caso del pingüino de Galápagos en un clima frío o de un pingüino de la Antártica en Galápagos. Aquí es importante que remarquen la posibilidad de que no sobrevivan en las nuevas condiciones ambientales. Al intentar justificar su

respuesta, los estudiantes pueden señalar que sus cuerpos no son adecuados o no están adaptados a esas condiciones.

- ¿Pasaría lo mismo con dos humanos? ¿Un adulto y un niño?

Las y los estudiantes deben conjeturar que en el caso de dos humanos podría pasar lo mismo con el pingüino de la Antártica en un clima cálido o el pingüino de Galápagos en el frío. En ambos casos los estudiantes deben señalar que al ser condiciones a las que el cuerpo no necesariamente está adecuado es posible una descompensación.

- Si ambos se encuentran en un lugar muy frío, ¿qué esperarían que pase?

En este caso se espera que las y los estudiantes noten las diferencias que existen entre un niño y un adulto. Por ejemplo, que señalen que el niño será el primero en sufrir algún tipo de malestar. Es importante buscar la justificación que permitirá plantear el desafío de la actividad.

2.2. Investigación

1. ¿Cuál es la regla de Bergman? ¿Qué relación tiene con la situación planteada?

La regla de Bergmann se basa en la observación de que los animales de una misma especie, pero de diferentes regiones geográficas, a menudo muestran diferencias en tamaño corporal, con individuos de áreas más frías siendo generalmente más grandes que sus contrapartes de regiones más cálidas. Esta adaptación se relaciona con la conservación del calor. Los animales más grandes tienen una menor relación superficie-volumen, lo que les ayuda a retener mejor el calor en ambientes fríos.

Es importante destacar que la regla de Bergmann **no se aplica a todas las especies** y que hay numerosas excepciones. Además, esta regla se aplica principalmente a los animales de sangre caliente, como mamíferos y aves, y no necesariamente a organismos de sangre fría, como los reptiles.

2. ¿Qué es la hipotermia? ¿Cuándo ocurre?

Se espera que aparezca la idea de que la hipotermia ocurre cuando el cuerpo pierde calor a una tasa mayor a la que puede producirlo. Es importante destacar el balance entre producción de calor y pérdida de calor. La hipotermia ocurre cuando uno se queda mucho rato en agua fría, cuando se está expuesto a bajas temperaturas o cuando hay problemas para regular la temperatura (la cantidad de calor producido no se adapta a las temperaturas externas).

Es posible que los estudiantes utilicen el término termorregulación para referirse a la situación. Permita el uso de este término, y sugiera a quienes lo utilicen, que lo definan para mayor claridad al compartir resultados, por ejemplo, pueden indicar que “La termorregulación es la capacidad que tiene el organismo para regular su temperatura”. Considere que la utilización de este término no es un requisito.

3. ¿La cantidad de grasa corporal es un factor relevante para desarrollar o no hipotermia?

Se espera que los estudiantes lleguen a la conclusión que la grasa corporal ayuda a conservar el calor producido. Por tanto, corresponde a un factor relevante para desarrollar. El propósito de considerar este factor no es el contar con un índice de grasa corporal, sino que se asocie con la superficie del sujeto.

4. ¿Qué otros factores son importantes para determinar el riesgo de una persona a sufrir hipotermia? ¿Cómo se relacionan estos factores con el tamaño del cuerpo humano?

Se espera que al menos los estudiantes consideren factores asociados a la generación de calor (grasa corporal, metabolismo), a la pérdida y conservación de calor (pérdida de calor por la piel, vello, temperatura ambiente, vestimenta, etc). También podrían mencionar otros como la humedad del ambiente, si la persona está en movimiento o no (por ejemplo, practicando algún deporte) y la intensidad de este.

2.3. Creación

- Describe con tus palabras la hipótesis que deseamos probar.

Se espera que escriban ideas cercanas a:

- “Las personas adultas tienen menor riesgo de sufrir hipotermia que los niños en un clima frío”
- “Los niños tienen más riesgo de sufrir hipotermia que los adultos en un clima frío”
- De los datos que encontraron ¿qué información es importante para probar o rechazar la hipótesis?

Se espera que expresen en lenguaje natural o mediante una expresión matemática la regla de Bergman, relacionándola con su comprensión de la hipótesis. Esto se traduce en la expresión,

$$\left(\frac{SA}{V}\right)_{adulto} < \left(\frac{SA}{V}\right)_{niño}$$

También pueden hacer referencia al área superficial (SA) y volumen (V) sin traducirlo explícitamente en la expresión anterior. Además, deben considerar que la condición para dar respuesta a la hipótesis es que ambas personas están en el mismo lugar, por lo que la temperatura es la misma para ambos.

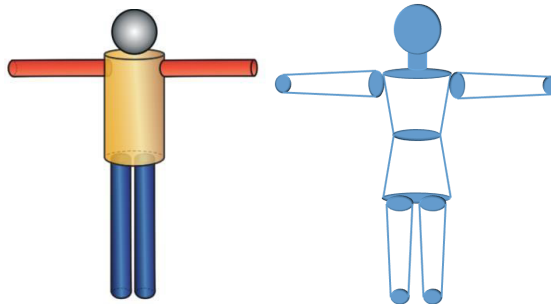
Se trata de personas sanas y no son adultos mayores, ni recién nacidos. Se descarta la cantidad de ropa que cada uno tiene puesta.

- ¿Cómo podemos utilizar esta información para probar o rechazar la hipótesis?

Las respuestas de las y los estudiantes deben hacer referencia al cálculo de la razón $SA:V$. Además, se espera que respondan que deben contar con un modelo del cuerpo humano que permita obtener el área superficial y el volumen.

- Describe/ justifica cuál es el modelo geométrico que utilizarás para resolver la hipótesis

Posibles modelos geométricos del cuerpo humano pueden ser los siguientes:



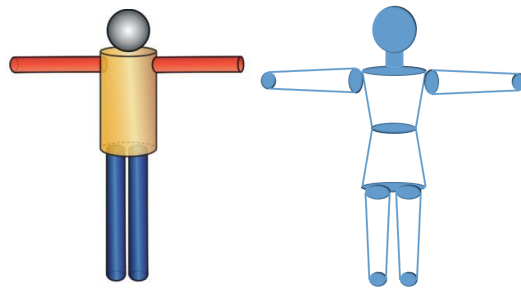
En la descripción de sus modelos, las y los estudiantes podrían expresar que estas figuras se aproximan a las distintas partes del cuerpo humano. También pueden surgir combinaciones de estos modelos y figuras geométricas, que pueden incluso ser más complejos, por ejemplo, considerando pequeñas esferas para cada articulación.

Entre los supuestos que se pueden esperar para justificar sus propuestas de modelos geométricos para el cuerpo humano se encuentran:

- El ancho de los brazos no cambia significativamente entre el brazo y el antebrazo.
- De forma similar se asume que el ancho de las piernas desde la cadera a la rodilla no cambia significativamente desde la rodilla al pie.
- Se asume que el área y volumen de manos y pies es despreciable en comparación al resto del cuerpo y por tanto no se consideran.
- De forma similar, se asume que el área y volumen del cuello es despreciable en comparación al resto del cuerpo.

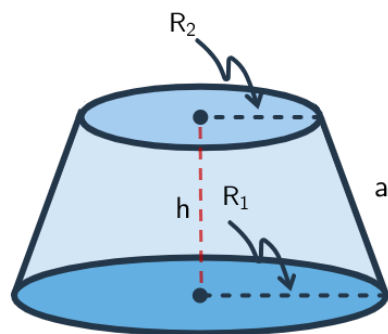
- Se asume que el área y volumen de manos y pies es despreciable en comparación al resto del cuerpo y por tanto no se consideran.
- De forma similar, se asume que el área y volumen del cuello es despreciable en comparación al resto del cuerpo,
- ¿Qué datos matemáticos son necesarios para determinar la razón SA:V?

Una posible respuesta es el “área (SA) y volumen (V) del cuerpo humano”. Una vez determinado el modelo geométrico con el cual describirán el cuerpo humano de un adulto y un niño, es muy probable que los estudiantes asocien las expresiones matemáticas correspondientes para áreas y volúmenes.



Por ejemplo, considerando los modelos anteriores, se espera que identifiquen:

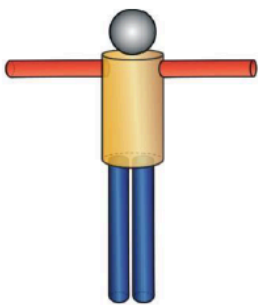
- Perímetro y superficie de una esfera
- Volumen y superficie de un cilindro
- Volumen y superficie de un cono truncado (ver imagen)



$$\acute{A} = \pi(R_1^2 + R_2^2 + a(R_1 + R_2))$$

$$V = \frac{h\pi}{3} (R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)$$

Se requerirá calcular los radios y alturas de las distintas figuras geométricas que modelan las diferentes partes del cuerpo humano para determinar el área superficial y volumen de cada parte del cuerpo. Deben reconocer además que deben sumar y restar áreas y sumar volúmenes para determinar el área superficial y el volumen de sus modelos geométricos del cuerpo humano. Se espera que planteen expresiones similares a las siguientes, las que por supuesto, pueden variar dependiendo del modelo de cuerpo humano,



$$V = V_{\text{torso}} + V_{\text{piernas}} + V_{\text{brazos}} + V_{\text{cabeza}} \quad (**)$$

$$SA = \hat{A}_{\text{torso}} + \hat{A}_{\text{piernas}} + \hat{A}_{\text{cabeza}} + \hat{A}_{\text{brazos}} - \hat{A}_{\text{común}_{\text{torso/brazos}}} - \hat{A}_{\text{común}_{\text{torso/piernas}}} \quad (*)$$

- ¿Qué datos necesitas para trabajar con el modelo que has obtenido?

En el caso de que decidan aproximar utilizando cilindros:

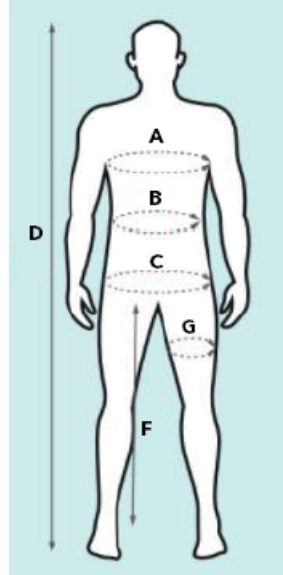
- Radio y largo de los brazos para distintas personas
- Radio y largo de las piernas para distintas personas
- Radio y altura del torso
- Radio de la cabeza

En el caso en que decidan aproximar utilizando cono truncado:

- Radio (menor y mayor) y largo de los brazos para distintas personas
- Radio (menor y mayor) y largo de las piernas para distintas personas
- Radio (superior, medio e inferior) y altura del torso
- Radio de la cabeza

- ¿Cómo puedes relacionar la información relevante del cuerpo humano con las expresiones matemáticas que identificaste?

Se sugiere apoyar a las y los estudiantes con figuras como la que se muestra a continuación para que puedan organizar sus cálculos. Note que la figura indica con letras las partes en las que se puede dividir el cuerpo para modelar.



Así se sugiere que los estudiantes organicen su trabajo de acuerdo a:

- El **torso**, aproximando con un cilindro o con dos conos truncados
- **Cabeza**, suponiendo que la altura de un hombre es aproximadamente de 8 cabezas o tomando medidas de contorno de cabeza y promediar.
- **Brazos y largo de torso**, suponiendo que el diámetro del brazo es igual al radio de la cabeza y aproximando con un cilindro, o suponiendo que el diámetro mayor del brazo es igual a la mitad del diámetro de la cabeza y el radio menor se aproxima a un tercio del radio de la cabeza. Para el largo del torso se puede asumir que, en el caso del hombre adulto el largo del torso es de “3 cabezas” y en el caso de un niño es de “2,5 cabezas”
- **Piernas**. Una opción es considerar el promedio de contorno y largo de pierna obtenido en la tabla 1 o aproximar el cálculo considerando la figura 1. En la otra opción podemos asumir que el diámetro superior de pierna es igual a $\frac{2}{3}$ del diámetro de cabeza y el radio inferior se puede aproximar a r_i es: $\frac{1}{3} r_c$

Se espera que establezcan relaciones entre los datos de la situación y variables matemáticas que les permitirán construir el modelo matemático. Entre estas:

- Torso: radio del torso (r_t) y su largo (l_t)
- Piernas: radio de las piernas (r_p) y su largo (l_p)
- Brazos: radio de los brazos (r_b) y su largo (l_b)
- Cabeza: radio de la cabeza (r_c)

O para el caso del uso de cono truncado

- Torso: radio superior(rs_t); radio medio (rm_t), y radio inferior (ri_t) y su largo (l_t), se puede suponer que el contorno superior e inferior es igual
- Piernas: radio superior de pierna(rs_p); radio inferior de pierna (ri_p), y su largo (l_p)
- Brazos: radio superior de brazo(rs_b); radio inferior de brazo(ri_b) y su largo (l_b)
- Cabeza: radio de la cabeza (r_c)

Guí a sus estudiantes a que sustituyan las variables obtenidas, en las expresiones (*) y (**) para el área superficial y volumen que determinaron previamente. Como ya se ha mencionado, dependiendo del modelo de cuerpo humano que hayan definido, estos cálculos variarán. A continuación se presentan dos ejemplos,

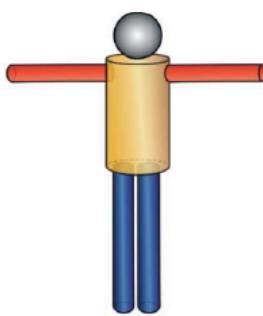
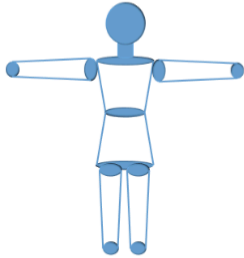


Diagrama de un modelo humano simplificado. El torso es un cilindro amarillo, los brazos son cilindros rojos horizontales, las piernas son cilindros azules verticales, y la cabeza es una esfera gris.

$\dot{A}_{torso} = 2\pi r_t^2 + 2\pi r_t l_t$	$V_{torso} = \pi r_t^2 l_t$
$\dot{A}_{piernas} = 2(2\pi r_p^2 + 2\pi r_p l_p)$	$V_{piernas} = 2\pi r_p^2 l_p$
$\dot{A}_{brazos} = 2(2\pi r_b^2 + 2\pi r_b l_b)$	$V_{brazos} = 2\pi r_b^2 l_b$
$\dot{A}_{cabeza} = 4\pi r_c^2$	$V_{cabeza} = \frac{4}{3}\pi r_c^3$
$\dot{A}_{común_{torso/brazos}} = 4\pi r_b^2$	
$\dot{A}_{común_{torso/piernas}} = 4\pi r_p^2$	

Fig. Ecuaciones para modelo de cuerpo humano usando cilindros y esferas



$$\dot{A}_{\text{torso-sup}} = 2\pi(rs_t^2 + rm_t^2 + a(rs_t + rm_t))$$

$$\dot{A}_{\text{torso-inf}} = 2\pi(rm_t^2 + ri_t^2 + a(rm_t + ri_t))$$

$$\dot{A}_{\text{piernas}} = 2(2\pi(rs_p^2 + ri_p^2) + \pi(rs_p^2 + ri_p^2 + a(rs_p + ri_p)))$$

$$\dot{A}_{\text{brazos}} = 2(2\pi(rs_b^2 + ri_b^2) + \pi(rs_b^2 + ri_b^2 + a(rs_b + ri_b)))$$

$$\dot{A}_{\text{cabeza}} = 4\pi r_c^2$$

$$\dot{A}_{\text{común}_{\text{torso}/\text{brazos}}} = 4\pi rs_b^2$$

$$\dot{A}_{\text{común}_{\text{torso}/\text{piernas}}} = 4\pi rs_p^2$$

$$\dot{A}_{\text{común}_{\text{torso}/\text{torso}}} = 2\pi rm_t^2$$

$$V_{\text{torso-sup}} = 2 \frac{h\pi}{3} (rs_t^2 + rm_t^2 + rs_t \cdot rm_t)$$

$$V_{\text{torso-inf}} = 2 \frac{h\pi}{3} (rm_t^2 + ri_t^2 + rm_t \cdot ri_t)$$

$$V_{\text{piernas}} = 2 \frac{h\pi}{3} (rs_p^2 + ri_p^2 + rs_p \cdot ri_p)$$

$$V_{\text{brazos}} = 2 \frac{h\pi}{3} (rs_b^2 + ri_b^2 + rs_b \cdot ri_b)$$

$$V_{\text{cabeza}} = \frac{4}{3} \pi r_c^3$$

Fig. Ecuaciones para modelo de cuerpo humano usando conos truncados y esferas

Se espera que los valores de los radios necesarios para sus cálculos provengan de modelos ya establecidos para distintas tallas o bien, podría animarlos a que ellos puedan tomar medidas y calcular un promedio. Con estos valores deberán completar una tabla como la siguiente, en función de su modelo geométrico de cuerpo humano.

Medida cuerpo		Hombre adulto	Niño
A	Contorno pecho (cm)		
B	Contorno cintura (cm)		
C	Contorno cadera (cm)		
D	Altura aproximada (cm)		
F	Largo entrepierna (cm)		
G	Contorno pierna (cm)		

Note que las medidas que las y los estudiantes encontrarán o medirán son los contornos de piernas, brazos y torso. Es decir, deberán despejar el radio de interés a partir de la expresión $P = 2\pi r$.

Trabajando con el contorno del torso

Dependiendo de los estudiantes, pueden elegir aproximar el torso mediante un cilindro o podrían utilizar dos conos truncados. En el caso de la aproximación del torso mediante un cilindro, se tiene que los valores A,B y C de la tabla anterior, se pueden promediar para obtener un valor promedio de contorno para el torso como se muestra a continuación.



En el caso de que se utilicen conos truncados no es necesario hacer la simplificación anterior.

Trabajando con la cabeza

Es posible estimar el radio de la cabeza de un adulto y niño, a partir de proporciones anatómicas usadas en el arte. Esta es una posible respuesta que podrían seguir sus estudiantes. No obstante lo anterior, podrían haber grupos que determinen los radios mediante mediciones o información que encuentren en la red.

En el arte, **se suele suponer** que la altura de un hombre son “8 cabezas”, mientras que para un niño son 6 (ver figura a continuación).

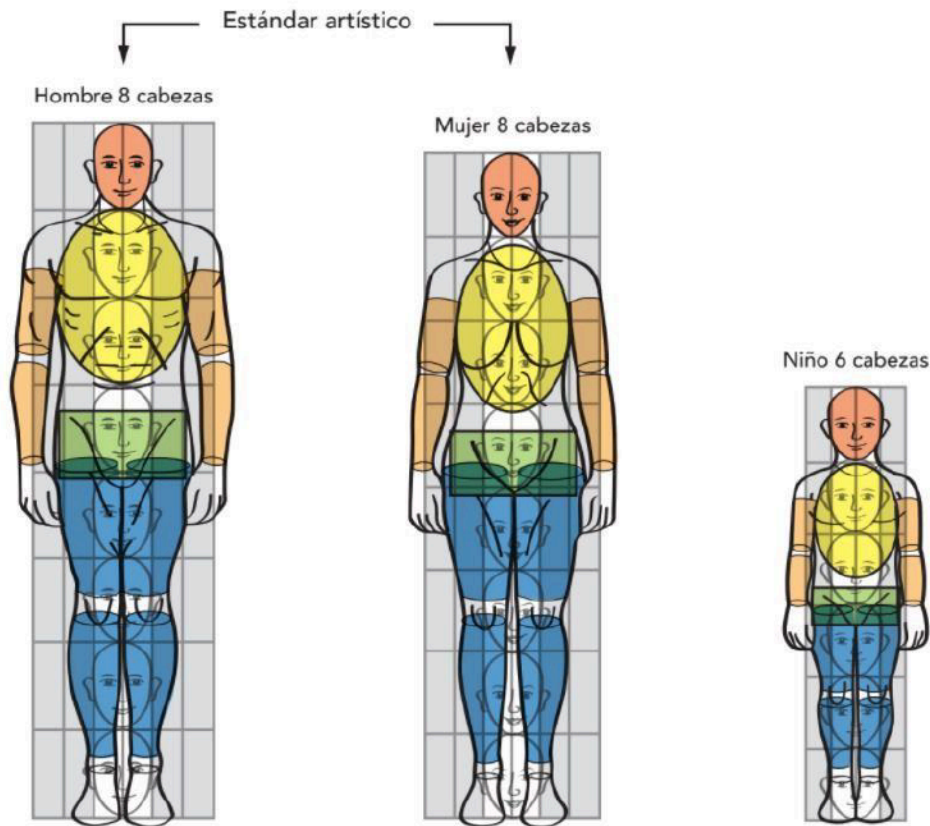


Fig. Proporciones artísticas del cuerpo humano

Dado lo anterior, si suponemos que la cabeza es una esfera, entonces se puede determinar la medida del radio de la cabeza mediante las siguientes relaciones,

$$8 \cdot (2 \cdot r_{\text{adulto}}) = h_{\text{adulto}}$$

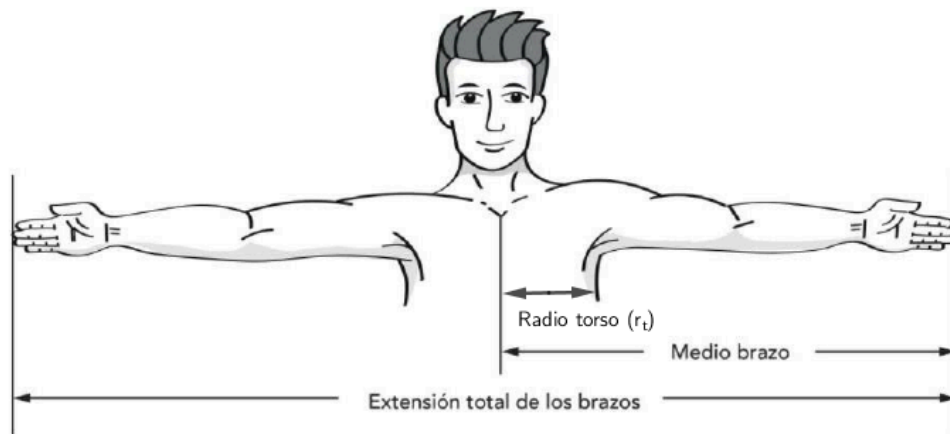
$$6 \cdot (2 \cdot r_{\text{niño}}) = h_{\text{niño}}$$

Trabajando con el radio y largo del brazo y largo del torso

En forma similar a los casos anteriores, tenemos dos opciones:

- **Se puede suponer** que el diámetro del brazo es igual al radio de la cabeza. Es decir **el radio del brazo es igual a la mitad del radio de la cabeza**. Para

conocer el largo de los brazos, se puede usar una relación antropométrica propuesta por Leonardo da Vinci (“hombre de vitruvio”), que plantea que la medida de ambos brazos estirados es similar a la altura de una persona.



Con esta información es posible determinar la siguiente expresión para obtener el largo del brazo,

$$l_{\text{brazo}} = \frac{h - 2 r_{\text{torso}}}{2}$$

- En el caso que los brazos se modelen usando **conos truncados**, es posible suponer a partir de las sugerencias de proporciones artísticas, que el radio mayor del brazo es igual a la mitad del radio de la cabeza, mientras que el radio menor se aproxima a un tercio del radio de la cabeza.
- Para el **largo del torso**, de las proporciones anatómicas mostradas anteriormente se asume que en el caso del hombre adulto el largo del torso es de “3 cabezas” y en el caso de un niño de “2,5 cabezas”. Así, es posible plantear las siguientes relaciones para determinar la información restante,

$$\begin{aligned} \text{Adulto: } l_{\text{torso}} &= 3 \cdot (2 r_{\text{adulto}}) \\ \text{Niño: } l_{\text{torso}} &= 2,5 \cdot (2 r_{\text{niño}}) \end{aligned}$$

Trabajando con el radio y largo de piernas

Para cálculo del radio de pierna (r_p) y largo de pierna (l_p), es posible que sus

estudiantes sigan las siguientes estrategias.

- Considerar el promedio de contorno y largo de pierna obtenido mediante información de tallas o mediciones propias.
- En el caso de usar conos truncados, podrían asumir que por ejemplo, el diámetro superior de la pierna es igual a $\frac{2}{3}$ del diámetro de cabeza, por lo que $rs_p = \frac{2}{3} r_c$. De forma similar, podrían establecer que el diámetro inferior de la pierna se puede aproximar por $ri_p = \frac{1}{3} r_c$

Recomiende a sus estudiantes que sinteticen la información que han obtenido en una tabla como la siguiente:

Medida de cuerpo	Hombre adulto	Niño	Medida de cuerpo	Hombre adulto	Niño
Área de cabeza			Volumen cabeza		
Área torso (A_t)			Volumen torso (V_t)		
Área piernas (A_p)			Volumen piernas (V_p)		
Área cabeza (A_c)			Volumen cabeza (V_c)		
Área brazos (A_b)			Volumen brazos (V_b)		

- ¿La hipótesis que planteaste es verdadera?

Las y los estudiantes deberían expresar argumentos cómo que la cantidad de calor que pierden es proporcional a su área superficial, por tanto la relación SA:V para un adulto es menor lo que indica que la cantidad de calor que pierde es menor, entonces este tiene menor probabilidad de sufrir hipotermia. De aquí deben argumentar respecto a la veracidad de la hipótesis planteada

- ¿Cómo puedes usar tu modelo para analizar otras situaciones?

Una manera de responder a esta pregunta es construyendo una hoja de cálculo con los modelos de área y volumen e introducir datos para distintas tallas. Otra forma es construir el modelo para los pingüinos y realizar los cálculos en excel.

- Busca una manera de comprobar que los resultados para el área superficial que encuentras son correctos.

Existen diferentes modelos en línea que calculan el área superficial del cuerpo humano (BSA, por su sigla en inglés), basados en diferentes modelos (los más usuales) que se encuentran en la literatura y que las y los estudiantes podrían utilizar para poner a prueba la validez de sus resultados.

En la web www.calculator.net/body-surface-area-calculator.html se utilizan varios de estos modelos. En esta página también se presenta una tabla con el promedio de BSA clasificados por rango etario, que es útil para validar los resultados obtenidos:

¿Cómo podrías mejorar tu modelo?

Se espera que reflexionen sobre las simplificaciones que realizaron al construir el modelo, de manera que una forma de mejorarlo es construyendo un modelo que mejor se ajuste para el cálculo de área y volumen del cuerpo humano.

3. Comentarios finales

Al trabajar en la modelación de una situación es necesario evaluar continuamente el trabajo que se realiza en el tránsito por las fases que lo componen. Además, debe tenerse en cuenta que el ciclo de modelación es solo una forma de representar el proceso y los estudiantes podrían realizar el mismo sin seguir el orden que se muestra.

En cuanto al modelo matemático, se debe considerar en su evaluación:

- usar los resultados matemáticos para validar los supuestos del modelo.
- contrastar los resultados y los supuestos con el mundo real, para incluir nuevos factores en el modelo, en caso de que sea pertinente.

Es necesario ser conscientes de que cada modelo es perfectible y cada uno tiene una utilidad distinta, de manera que podamos interpretar sus resultados en el contexto en que lo hemos definido.