MAT CON

MATEMÁTICA CONECTADA

GUÍA DOCENTE

Lección 3 - Unidad Función Cuadrática

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMMEdu Laboratorio de Educación Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación Gobierno de Chile

PLAN DE REACTIVACIÓN EDUCATIVA Seamos Comunidad

unesco Cátedra

VISIÓN GLOBAL

Objetivo de la lección

Caracterizar una función cuadrática elemental a partir del tipo de cambio entre la variable dependiente y el cuadrado de la variable independiente, y determinar la expresión algebraica que la representa.

Lugar de la lección en la unidad

Esta lección continúa la secuencia de función cuadrática, en donde se introduce la función cuadrática elemental $(y = x^2)$ a partir de la cual vamos a definir el resto de las funciones cuadráticas en el resto de la unidad. Aquí se utilizan las nociones de funciones de segundo cambio constante junto con algunos resultados de proporcionalidad directa de las lecciones anteriores, para identificar el tipo de cambio y la expresión algebraica que representa a las funciones cuadráticas elementales.

Tareas matemáticas

T1. Identificar una relación de proporcionalidad directa entre las variables y sus transformaciones, reconociendo el tipo de cambio de la función cuadrática elemental en los valores de una tabla.
T2. Calcular el cociente entre los valores de las variables y sus transformaciones en una función cuadrática elemental, para determinar su valor constante.
T3. Determinar la expresión algebraica que representa una función cuadrática elemental.

Panorama leccion

En la Actividad 1 , los estudiantes exploran diferentes tablas en donde se relaciona una variable con el cuadrado de la otra, o el cuadrado de ambas variables, para determinar en qué caso existe una proporcionalidad directa y caracterizar las funciones cuadráticas elementales a partir del tipo de cambio entre las variables (T1).

En la Actividad 2 , los estudiantes utilizan lo que ya saben sobreproporcionalidad directa para analizar la relación entre la variable dependiente y el cuadrado de la variable independiente y encontrar la expresión algebraica que representa a las funciones cuadráticas elementales (T2 y T3).

Finalmente, en la Actividad 3 , los estudiantes replican el trabajo de las actividades anteriorespara identificar una función cuadrática elemental y determinar su expresión algebraica en situaciones relacionadas a la geometría y la física (T1, T2 y T3).

ACTIVACIÓN

Recordemos que dos variables **directamente proporcionales** cambian juntas multiplicándose por el mismo factor. En el siguiente ejemplo, y es directamente proporcional a x, lo que se verifica con los valores de la tabla.

	x	y	
	2	6	
$\cdot 3$	4	12	$\cdot 3$
$\cdot 2$	6	18	$\cdot 2$
	8	24	

Este tipo de relación se representa con una expresión algebraica de la forma $y = k \cdot x$, en donde $k = \frac{y}{x}$ es la constante de proporcionalidad.

1 **Utilizando el ejemplo anterior:**

a. Calcula el valor de la constante de proporcionalidad k.

a. Completa la expresión algebraica con el valor de k:

$$y = \boxed{} \cdot x$$

En la lección anterior analizamos la relación entre la distancia d que recorre una pelota que rueda por un plano inclinado y el tiempo t que demora en hacerlo. Reconocimos que estas dos variables no son directamente proporcionales y descubrimos que siguen un patrón de segundo cambio constante.

	t (segundos)	*d* (metros)	
	0	0	
$\Delta t = 1$			$\Delta d = 2$
	1	2	
$\Delta t = 1$			$\Delta d = 6$
	2	8	
$\Delta t = 1$			$\Delta d = 10$
	3	18	
$\Delta t = 1$			$\Delta d = 14$
	4	32	

2 **¿Cuál es el valor del segundo cambio constante $\Delta\Delta d$ en la tabla anterior?**

Respuesta experta

1

a. Con los valores de la tabla se calcula el cociente $\frac{y}{x}$, como es constante para cada par de valores entonces $k = 3$.

x	*y*	
2	6	$\longrightarrow \frac{6}{2} = 3$
4	12	$\longrightarrow \frac{12}{4} = 3$
6	18	$\longrightarrow \frac{18}{6} = 3$
8	24	$\longrightarrow \frac{24}{8} = 3$

b. $y = 3 \cdot x$

2 En la tabla se comprueba que $\Delta\Delta d = 4$.

t (segundos)	d (metros)
0	0
1	2
2	8
3	18
4	32

$\Delta t = 1$

$\Delta t = 1$

$\Delta t = 1$

$\Delta t = 1$

$\Delta d = 2$

$\Delta d = 6$

$\Delta d = 10$

$\Delta d = 14$

$\Delta\Delta d = 4$

$\Delta\Delta d = 4$

$\Delta\Delta d = 4$

GESTION DE LA ACTIVACIÓN

Inicio de la lección

Mencione a los estudiantes que en esta clase vamos a caracterizar la función cuadrática elemental, utilizando nociones de proporcionalidad directa junto con lo que saben sobre funciones de segundo cambio constante.

Coménteles que las funciones cuadráticas elementales nos ayudarán a definir el resto de las funciones cuadráticas en las siguientes clases.

Para comenzar, recordaremos algunas ideas importantes sobre proporcionalidad directa y sobre funciones de segundo cambio constante, y a lo largo de la actividad veremos cómo se relacionan ambos conceptos con la función cuadrática elemental.

Guiando la activación

Presente la actividad y de tiempo para que los estudiantes respondan, luego organice una discusión plenaria para que los estudiantes compartan sus respuestas, asegurándose que sean capaces de:

- Calcular el cociente entre dos variables para expresar algebraicamente su relación.
- Calcular el valor del segundo cambio constante a partir de una tabla en el contexto de una pelota que rueda por un plano inclinado (¿Cómo es el cambio del cambio de la variable dependiente d?).

Lo que debemos recordar para esta lección

- Si y es directamente proporcional a x, entonces la expresión algebraica que representa esta relación es $y = k \cdot x$, donde $k = \frac{y}{x}$ es la constante de proporcionalidad.
- Para determinar el valor de la constante de proporcionalidad mediante el cociente de los valores de las variables, es necesario hacerlo en el orden correcto:

$$\text{constante} = \frac{\text{valor de la variable dependiente}}{\text{valor de la variable independiente}}$$

  En la siguiente tabla se muestra cómo se calcula la constante y la expresión algebraica dependiendo de qué variable es proporcional a la otra:

Relación de proporcionalidad	Valor de k	Expresión algebraica
y es directamente proporcional a x	$\frac{y}{x} = k$	$y = k \cdot x$
x es directamente proporcional a y	$\frac{x}{y} = k$	$x = k \cdot y$

- Si dos variables siguen un patrón de segundo cambio constante, entonces se relacionan mediante una función cuadrática.

ACTIVIDAD 1

En el caso de la pelota que rueda por el plano inclinado vimos que la distancia d y el tiempo t no eran directamente proporcionales, pero se relacionan mediante una función cuadrática.

¿Por qué le llamamos función "cuadrática" a este tipo de relaciones?

Para responder esta pregunta, exploraremos la relación que hay entre una variable y el cuadrado de la otra o entre los cuadrados de ambas variables, analizando las siguientes tablas de valores:

Tabla 1

t (seg)	d^2 (m^2)
0	0
1	4
2	64
3	324
4	1024

Tabla 2

t^2 (seg^2)	d (m)
0	0
1	2
4	8
9	18
16	32

Tabla 3

t^2 (seg^2)	d^2 (m^2)
0	0
1	4
4	64
9	324
16	1024

1. ¿En cuál o cuáles de las tablas se verifica que hay una **proporcionalidad directa** ?

MAT CON
MATEMÁTICA CONECTADA

Respuesta experta

1 En la Tabla 2 las cantidades cambian juntas multiplicándose por el mismo número, entonces hay una proporcionalidad directa entre d y t^2.

t^2 (seg ^{2})	d (m)
0	0
1	2
4	8
9	18
16	32

$\cdot\ 9$ $\cdot\ 4$

$\cdot\ 9$ $\cdot\ 4$

GESTION ACTIVIDAD 1

Objetivo

Caracterizar la función cuadrática elemental a partir de la relación de proporcionalidad directa entre la variable dependiente y y el cuadrado de la variable independiente x^2.

Trabajo individual

Presente la actividad completa y de tiempo para que cada estudiante responda de manera individual. Durante el monitoreo, guíe a los estudiantes para que busquen la proporcionalidad directa en cada tabla usando el tipo de cambio que hay entre las variables: ambas cambian juntas multiplicándose por el mismo número.

Discusión de curso completo

Organice una discusión plenaria para que compartan sus respuestas y guíe una reflexión en donde:

- Identifiquen la proporcionalidad directa en la Tabla 2, ya que los valores de d y t^2 cambian juntos multiplicándose por el mismo número.
- Descarten la proporcionalidad directa en la Tabla 1 y en la Tabla 3, ya que no se cumple el patrón de cambio de la proporcionalidad directa entre t y d^2 ni entre d^2 y t^2.

Conclusiones

Conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas clave:

- Es posible establecer relaciones de dependencia entre variables o entre una variable y una **transformación** de la otra.
- Todas las funciones cuadráticas siguen un patrón de segundo cambio constante. Algunas además presentan una **proporcionalidad directa entre la variable dependiente y el cuadrado de la variable independiente**.

Formalización

Si dos variables x e y tienen una proporcionalidad directa entre y y x^2, entonces se relacionan mediante una **función cuadrática elemental**.

Por ejemplo, cuando una pelota rueda por un plano inclinado, las variables d y t se relacionan mediante una función cuadrática elemental, ya que d es directamente proporcional al cuadrado de la variable independiente t^2; como se observa en las siguientes tablas:

Segundo cambio constante

Δt	*t (segundos)*	*d (metros)*	Δd	$\Delta\Delta d$
	0	0		
Δt = 1	1	2	Δd = 2	
Δt = 1	2	8	Δd = 6	$\Delta\Delta d$ = 4
Δt = 1	3	18	Δd = 10	$\Delta\Delta d$ = 4
Δt = 1	4	32	Δd = 14	$\Delta\Delta d$ = 4

Proporcionalidad directa entre d y t^2

t^2 (seg^2)	*d (m)*
0	0
1	2
4	8
9	18
16	32

$\cdot 9$ $\cdot 4$

Anticipaciones y sugerencias

- En línea con las conclusiones, sugerimos recalcar a los estudiantes que no es necesario buscar el patrón de segundo cambio constante entre x e y junto con la proporcionalidad directa entre y y x^2 para asegurar que hay una función cuadrática elemental; sólo basta con verificar la proporcionalidad directa entre y y x^2 ya que esto incluye al patrón de segundo cambio constante.

ACTIVIDAD 2

Ya concluímos que hay una función cuadrática elemental entre d y t^2, ahora busquemos la expresión algebraica que representa esa relación.

$t^2\ (seg^2)$	$d\ (m)$
0	0
1	2
4	8
9	18
16	32

1. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad entre d y t^2?
2. ¿Qué expresión algebraica representa la función cuadrática elemental entre d y t^2?

Respuesta experta

1 Con los valores de la tabla se calcula el cociente $\frac{d}{t^2}$, como es constante para cada par de valores de la tabla entonces la constante de proporcionalidad es igual a 2.

t^2 (seg ^{2})	d (m)	
0	0	
1	2	$\longrightarrow \frac{2}{1} = 2$
4	8	$\longrightarrow \frac{8}{4} = 2$
9	18	$\longrightarrow \frac{18}{9} = 2$
16	32	$\longrightarrow \frac{32}{16} = 3$

2 Con lo anterior, la expresión algebraica es $d = 2 \cdot t^2$

GESTION ACTIVIDAD 2

Objetivo

Deducir la expresión algebraica que representa una función cuadrática elemental entre dos variables, a partir de la proporcionalidad directa entre la variable dependiente y el cuadrado de la variable independiente.

Trabajo individual

Presente la actividad completa y dé tiempo para que cada estudiante responda de manera individual. Durante el monitoreo, ayude a los estudiantes a calcular la constante de proporcionalidad como el cociente entre la variable dependiente d y el cuadrado de la variable independiente t^2 para cada fila de la tabla.

Discusión de curso completo

Organice una discusión plenaria para que compartan sus respuestas, guiando una reflexión en donde:

- Identifiquen dónde está "el cuadrado" de la función cuadrática. (¿La función es cuadrática porque ambas variables están al cuadrado?)
- Reconozcan la relación entre la función cuadrática elemental y la función afín lineal a partir de:

- El patrón de cambio: la función cuadrática elemental tiene un patrón de segundo cambio constante y la función lineal tiene un patrón de primer cambio constante.
- La proporcionalidad directa: en la función cuadrática elemental entre la variable dependiente y el cuadrado de la variable independiente y en la función lineal entre las variables.
- La forma de la expresión algebraica: en la función cuadrática elemental $y = a \cdot x^2$ y en la función lineal $y = k \cdot x$.

Conclusiones

Conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas clave:

- Encontramos una representación algebraica para una función cuadrática elemental.

Formalización

Una función cuadrática elemental se representa con una expresión algebraica de la forma $y = a \cdot x^2$, donde a es un valor constante.

- En una función cuadrática elemental, la constante de proporcionalidad y es equivalente al cociente entre la variable dependiente y el cuadrado de la variable independiente $a = \frac{y}{x^2}$.

  Por ejemplo, cuando una pelota rueda por un plano inclinado, la distancia d que recorre y el tiempo t que demora en hacerlo se relacionan mediante la función cuadrática elemental $d = a \cdot t^2$, en este caso la constante de proporcionalidad es $a = \frac{d}{t^2} = 2$.

Anticipaciones y sugerencias

- Es posible que algunos estudiantes determinen la constante de proporcionalidad sin calcular el cociente constante $k = \frac{y}{x^2}$, considerando que es equivalente con el valor de y cuando $x = 1$. En este caso, es igual al valor de d cuando $t^2 = 1$, lo que se puede identificar directamente de la tabla:

t^2 (seg ^{2})	d (m)
0	0
1	**2**
4	8
9	18
16	32

→ **a = 2 (constante de proporcionalidad)**

- En las conclusiones, primero se proponen formalizar la función cuadrática elemental a partir de su expresión algebraica, y luego describir que el valor de a en esa expresión corresponde a la constante de proporcionalidad entre y y x^2. De este modo, se enfatiza la obtención de la expresión algebraica a partir de la relación de proporcionalidad directa entre una variable dependiente y el cuadrado de la variable independiente.
- En línea con las anticipaciones de la actividad anterior, luego de realizar esta actividad y comprender la expresión algebraica de una función cuadrática elemental es posible demostrar matemáticamente que la relación de proporcionalidad directa entre la variable dependiente y y el cuadrado de la variable independiente x^2 describe una función de segundo cambio constante, **pero no viceversa** . Puede seguir la siguiente demostración con sus estudiantes si lo considera pertinente:

Demostración (Proporcionalidad directa ⇒ Segundo cambio constante)

Si sabemos que y es directamente proporcional a x^2, entonces la expresión algebraica que describe esta relación es $y = a \cdot x^2$, en donde a es un valor constante.

Luego, podemos construir una tabla de valores en donde Δx sea constante para comprobar si $\Delta\Delta y$ también es constante:

x	y
0	0
1	a
2	$4a$
3	$9a$
4	$16a$

$\Delta x = 1$

$\Delta x = 1$

$\Delta x = 1$

$\Delta x = 1$

$\Delta y = a$

$\Delta y = 3a$

$\Delta y = 5a$

$\Delta y = 7a$

$\Delta\Delta y = 2a$

$\Delta\Delta y = 2a$

$\Delta\Delta y = 2a$

Finalmente, como $\Delta\Delta y = 2a$ es constante, entonces hay un patrón de segundo cambio constante entre x e y.

Recíproco: Segundo cambio constante ⇏ Proporcionalidad directa

Si hay un patrón de segundo cambio constante entre x e y, es decir que si Δx es constante entonces $\Delta\Delta y$ también es constante, entonces hay una función cuadrática entre x e y.

Luego, no hay información suficiente para asegurar que también exista una proporcionalidad directa entre y y x^2.

ACTIVIDAD 3

Es posible encontrar funciones elementales en diferentes contextos. Analicemos las siguientes situaciones

Situación 1: Se mide la arista de un cubo a y su respectiva área superficial A

a (m)	A (m²)
1	6
2	24
3	54
4	96

$a^2 (m^2)$	$A (m^2)$
	6
	24
	54
	96

Situación 2: Se mide el radio de un círculo r y su respectiva área A.

a (m)	$A (m^2)$
3	9π
6	36π
9	81π
12	144π

$r^2 (m^2)$	$A (m^2)$
	9π
	36π
	81π
	144π

Situación 3: Se mide la distancia d que recorre un objeto en caída libre en cada instante de tiempo t.

t (seg)	d (m)
2	19.6
4	78.4
6	176.4
8	313.6

$t^2 (seg^2)$	d (m)
	19.6
	78.4
	176.4
	313.6

1 Para cada situación:

a. Completen la tabla de la variable dependiente y el cuadrado de la variable independiente.

b. Comprueben que hay una función cuadrática elemental entre las variables.

c. Calculen el valor de la constante de proporcionalidad a.

d. Determinen la expresión algebraica de la función cuadrática elemental.

Respuesta experta

1

a.

Situación 1

$a^2 (m^2)$	$A (m^2)$
1	6
4	24
9	54
16	96

Situación 2

$r^2 (m^2)$	$A (m^2)$
9	9π
36	36π
81	81π
144	144π

Situación 3

$t^2 (seg^2)$	$d (m)$
4	19.6
16	78.4
36	176.4
64	313.6

b. En cada situación hay una función cuadrática elemental ya que se comprueba la proporcionalidad directa entre la variable dependiente y el cuadrado de la variable independiente:

Situación 1

$a^2 (m^2)$	$A (m^2)$
1	6
4	24
9	54
16	96

$\cdot 9$ $\cdot 4$ $\cdot 9$ $\cdot 4$

Situación 2

$r^2 (m^2)$	$A (m^2)$
9	9π
36	36π
81	81π
144	144π

$\cdot 9$ $\cdot 4$ $\cdot 9$ $\cdot 4$

Situación 3

$t^2 (seg^2)$	$d (m)$
4	19.6
16	78.4
36	176.4
64	313.6

$\cdot 9$ $\cdot 4$ $\cdot 9$ $\cdot 4$

c. En cada situación se calcula el valor de la constante de proporcionalidad como el cociente entre la variable dependiente y el cuadrado de la variable independiente $a = \frac{y}{x^2}$:

Situación 1 $(a = 6)$

$a^2 (m^2)$	$A (m^2)$	
1	6	$\rightarrow \frac{6}{1} = 6$
4	24	$\rightarrow \frac{24}{4} = 6$
9	54	$\rightarrow \frac{54}{9} = 6$
16	96	$\rightarrow \frac{96}{16} = 6$

Situación 2 $(a = \pi)$

$r^2 (m^2)$	$A (m^2)$	
9	9π	$\rightarrow \frac{9\pi}{9} = \pi$
36	36π	$\rightarrow \frac{36\pi}{36} = \pi$
81	81π	$\rightarrow \frac{81\pi}{81} = \pi$
144	144π	$\rightarrow \frac{144\pi}{144} = \pi$

Situación 3 $(a = 4.9)$

$t^2 (seg^2)$	$d (m)$	
4	19.6	$\rightarrow \frac{19.6}{4} = 4.9$
16	78.4	$\rightarrow \frac{78.4}{16} = 4.9$
36	176.4	$\rightarrow \frac{176.4}{36} = 4.9$
64	313.6	$\rightarrow \frac{313.6}{64} = 4.9$

d. Según lo anterior, la expresión algebraica que representa la relación de cada situación es:

- Situación 1: $A = 6 \cdot a^2$
- Situación 2: $A = \pi \cdot r^2$
- Situación 3: $d = 4,9 \cdot t^2$

GESTION ACTIVIDAD 3

Objetivo

Comprobar que dos variables se relacionan mediante una función cuadrática elemental y determinar la expresión algebraica que la representa.

Trabajo en grupos

Mantenga las parejas de trabajo y muestre la actividad completa, durante el monitoreo ayude a los estudiantes a replicar el trabajo de las actividades anteriores en las nuevas situaciones.

Discusión de curso completo

Organice una discusión plenaria para que compartan sus respuestas y guíe una reflexión en donde reconozcan que en todas las situaciones hay una función cuadrática elemental (¿En qué situaciones es posible identificar una proporcionalidad directa entre la variable dependiente y el cuadrado de la variable independiente?).

Conclusiones

Conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas clave:

- Algunas situaciones se modelan con una función cuadrática elemental de la forma $y = a \cdot x^2$.

  Por ejemplo, en esta clase vimos que las siguientes situaciones se modelan con una función cuadrática elemental:

  - La relación entre la distancia d que recorre una pelota que rueda por un plano inclinado y el tiempo t que demora en hacerlo: $d = a \cdot t^2$. El valor de a depende de la inclinación del plano, y en este caso $a = 2$.
  - La relación entre la arista de un cubo a y su área superficial A: $A = 6 \cdot a^2$.
  - La relación entre el radio de una circunferencia r y su área A: $A = \pi \cdot r^2$.
  - La relación entre la distancia d que recorre un objeto que se desplaza en caída libre y el tiempo t que demora en caer: $d = 4,9 \cdot t^2$.

Anticipaciones y sugerencias

- Es posible que algunos estudiantes conozcan de cursos anteriores la expresión algebraica que relaciona el radio de un círculo r y su área A: $(A = \pi \cdot r^2)$. En estos casos, anímelos a que determinen la expresión algebraica que relaciona ambas variables comprobando que existe una función cuadrática elemental entre ellas y calculando el valor de la constante de proporcionalidad $a = \pi$.

TICKET DE SALIDA

Las variables x e y de la tabla se relacionan mediante una función cuadrática elemental.

x	y
0	0
1	5
2	20
3	45
4	80

1. **¿Cuál es la expresión algebraica que representa dicha relación?**

a. $y = 10x^2$
b. $x^2 = 5y$
c. $y = 5x^2$
d. $y = \frac{1}{5}x^2$

Indicador de aprendizaje	Determinan la expresión algebraica que representa la función cuadrática elemental entre dos variables.

Posibles comprensiones

Alternativa	Alternativa correcta	Posible interpretación asociada al error
A		Confunden el valor del segundo cambio constante $\Delta\Delta y = 10$ con el valor de la constante de proporcionalidad $a = 5$.
B		Invierten el orden de las variables en la expresión algebraica.
C	X	
D		Calculan la constante de proporcionalidad como el cociente entre el cuadrado de la variable independiente y la variable dependiente, lo cual corresponde al inverso multiplicativo de la constante de proporcionalidad $\frac{x^2}{y} = \frac{1}{5}$.

CIERRE DE LECCIÓN

En esta lección aprendimos que:

- Es posible establecer relaciones de proporcionalidad entre las variables, o entre transformaciones de las variables.
- Si entre dos variables x e y hay una proporcionalidad directa entre la variable dependiente y y el cuadrado de la variable independiente x^2, entonces x e y se relacionan mediante una función cuadrática elemental.
- Una función cuadrática elemental entre x e y se representa algebraicamente con una expresión de la forma $y = a \cdot x^2$, donde $a = \frac{y}{x^2}$ es la constante de proporcionalidad.

  Por ejemplo, cuando una pelota rueda por un plano inclinado, la distancia que recorre d es directamente proporcional al cuadrado del tiempo que demora en hacerlo t^2. Como muestra la siguiente tabla:

t^2 (seg ^{2})	d (m)
0	0
1	2
4	8
9	18
16	32

  Como el cociente $\frac{y}{x^2}$ es constante para todos los valores de la tabla, entonces la expresión algebraica que representa la función cuadrática elemental que representa esta situación es $d = 2 \cdot t^2$.

- Es posible encontrar funciones cuadráticas elementales en diferentes contextos.

  Por ejemplo:

  - La relación entre la distancia d que recorre una pelota que rueda por un plano inclinado y el tiempo t que demora en hacerlo: $d = a \cdot t^2$. El valor de a depende de la inclinación del plano.
  - La relación entre la arista de un cubo a y su área superficial A: $A = 6 \cdot a^2$.

- La relación entre el radio de una circunferencia r y su área A: $A = \pi \cdot r^2$
- La relación entre la distancia d que recorre un objeto que se desplaza en caída libre y el tiempo t que demora en caer: $d = 4,9 \cdot t^2$.

Términos matemáticos que ahora puedo ocupar:

- Función cuadrática elemental.