



MATEMÁTICA CONECTADA

GUÍA DOCENTE

Lección 2 – Unidad Función Cuadrática

VISIÓN GLOBAL

Objetivo de la lección

Caracterizar una función cuadrática en base al tipo de cambio entre las variables, reconociendo un patrón de segundo cambio constante entre las variables en tablas y gráficos.

Lugar de la lección en la unidad

Esta lección es la segunda de la secuencia de función cuadrática y utiliza las nociones que los estudiantes tienen sobre el tipo de cambio entre dos variables, para identificar el patrón de cambio que siguen dos variables que se relacionan mediante una función cuadrática en una tabla y en un gráfico. En las siguientes lecciones, se caracterizará la función cuadrática en base a otras representaciones.

Tareas matemáticas

- T1. Determinar el tipo de relación entre dos variables a partir del cambio de sus valores.
- T2. Representar gráficamente una función cuadrática a partir del patrón de segundo cambio constante.
- T3. Calcular el valor del segundo cambio constante en una función cuadrática.

Panorama lección

En la **Actividad 1** se presenta la situación de una pelota que rueda por un plano inclinado. Los estudiantes analizan una tabla que muestra la distancia d que recorre la pelota y el tiempo t que demora en hacerlo y comparan el cambio entre estas variables con los otros tipos de cambio que conocen (T1), para reconocer que la relación entre d y t es diferente y sigue un patrón de segundo cambio constante.

En la **Actividad 2**, los estudiantes representan gráficamente la función cuadrática entre d y t siguiendo el patrón que siguen en esta situación (T2) y determinan la forma que tiene el gráfico de una función cuadrática.

Finalmente, en la **Actividad 3**, los estudiantes aplican los resultados anteriores para identificar el patrón de segundo cambio constante en una situación similar donde el plano tiene una inclinación diferente (T3) y construir su gráfico a partir de él (T2).

ACTIVACIÓN

Observa la siguiente animación y responde.

Animación

0 km



$t = 0 \text{ min}$

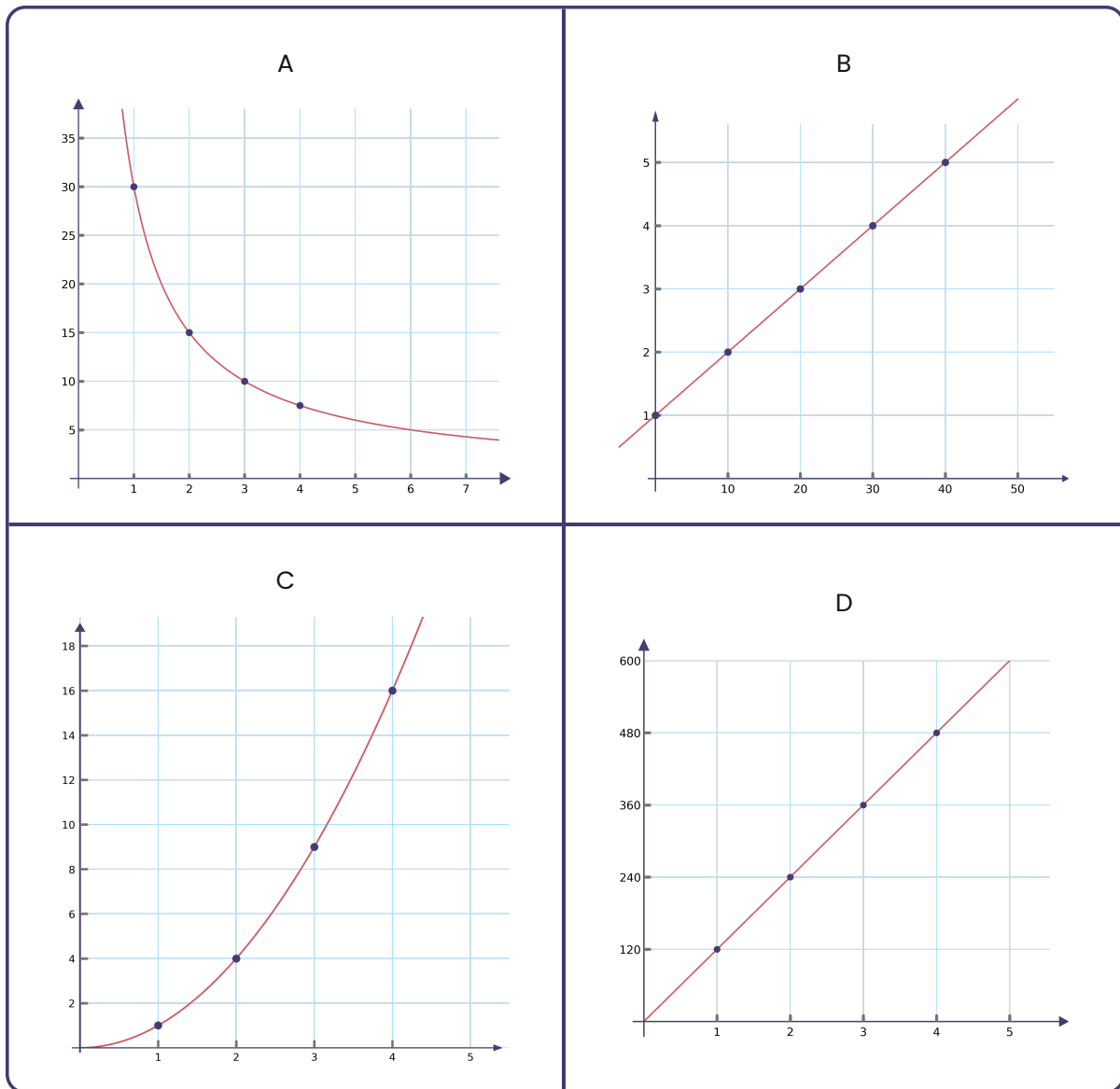




- 1 Completa los cambios de los valores de la tabla y en base a eso justifica que hay una función lineal que relaciona d con t .

	t (minutos)	d (kilómetros)	
	0	0	
$\Delta t = 1$	1	2	$\Delta d = 1$
$\Delta t =$	2	4	$\Delta d =$
	3	6	

- 2 ¿Cuál de los siguientes gráficos representa la función lineal entre d y t ? Justifica.



Respuesta experta

1. En la tabla se observa que la variable t tiene un cambio constante $\Delta t = 1$ y esto produce que el cambio de la variable d también sea constante $\Delta d = 2$. Entonces d y t se relacionan mediante una función afín lineal.
2. El gráfico C representa la relación entre las variables, ya que se observa el mismo cambio constante que en la tabla.

GESTION DE LA ACTIVACIÓN

Inicio de la lección

Comente a sus estudiantes que en esta clase aprenderán a caracterizar un nuevo tipo de relación entre dos variables a partir del tipo de cambio que hay entre ellas, el cual observaremos en una tabla y en un gráfico.

Para comenzar, indique que en la activación se analizará una animación que describe un tipo de relación ya conocida, para recordar cómo identificar el tipo de cambio entre dos variables en una tabla y cómo determinar su gráfico en base a esto.

Guiando la activación

Muestre la animación que muestra el recorrido de un automóvil que se mueve con velocidad constante y de tiempo para que los estudiantes respondan, durante el monitoreo:

- Ayude a los estudiantes a dibujar flechas en la tabla para identificar el tipo de cambio entre las variables.
- Guíe a los estudiantes a seleccionar el gráfico adecuado en base al cambio que reconocieron en la tabla dibujando las flechas horizontales y verticales que describen los cambios entre las coordenadas de los puntos del gráfico, ya que no basta sólo con observar la forma del gráfico.
- Puede discutir con los estudiantes la interpretación del cambio constante según el contexto, en donde el valor $\Delta d = 2$ se relaciona con la velocidad del automóvil: $2 \frac{\text{km}}{\text{min}}$.

Lo que debemos recordar para esta lección

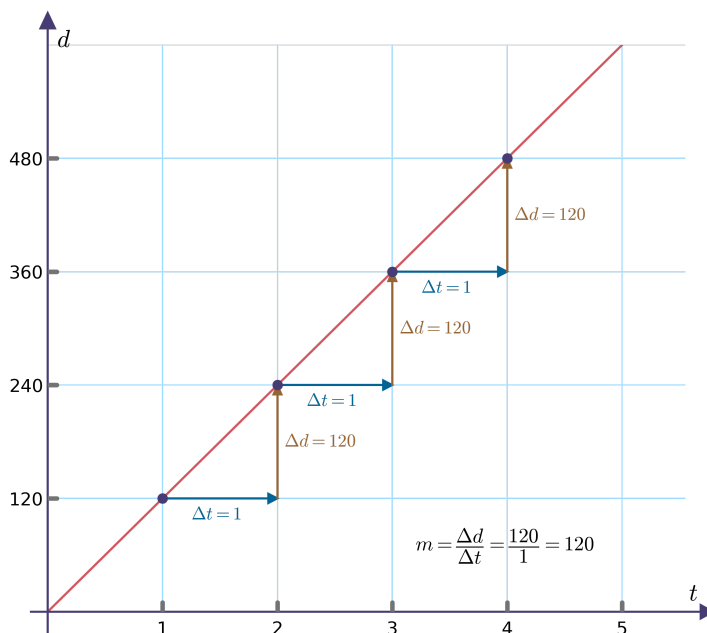
- Una **función lineal** es un tipo de **función afín**, que se caracteriza por presentar dos patrones de cambio simultáneamente:
 - Los cambios constantes en la variable independiente Δx producen cambios constantes en la variable dependiente Δy .
 - Si el valor de una variable se multiplica por un número, el valor de la otra variable también se multiplica por ese mismo número.

	t (horas)	d (kilómetros)	
$\Delta t = 1$	1	120	$\Delta d = 120$
$\Delta t = 1$	2	240	$\Delta d = 120$
$\Delta t = 1$	3	360	$\Delta d = 120$
	4	480	

	t (horas)	d (kilómetros)	
$\cdot 3$	1	120	$\cdot 3$
$\cdot 2$	2	240	$\cdot 2$
	3	360	
	4	480	

- El tipo de cambio entre las variables se puede visualizar en el gráfico usando flechas horizontales y verticales para unir los puntos.

En el caso de una función lineal, su gráfico corresponde a una línea recta que intersecta el origen del plano. Al igual que los cambios constantes de x producen cambios constantes de y en la tabla; las flechas horizontales tienen el mismo largo entre sí y esto produce que las flechas verticales sean todas de igual longitud.

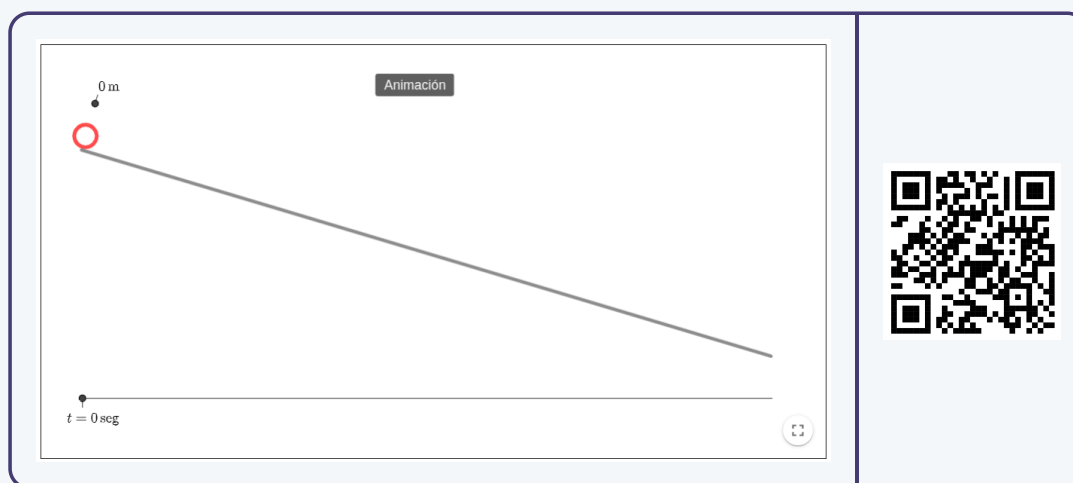


ACTIVIDAD 1

Ahora vamos a estudiar otro tipo de relación entre dos variables, para ello consideremos la situación en donde se registran las distancias d recorridas por una pelota en distintos tiempos t , cuando rueda por un plano inclinado.

Para entender mejor el contexto de esta situación, veamos el siguiente video.

Observa la animación y responde.



La siguiente tabla muestra algunos valores de d y t para la pelota que rueda por el plano inclinado que se mostró en la animación.

t (segundos)	d (metros)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

- 1 Determinen los cambios Δt y Δd para los valores de la tabla.
- 2 Describan cómo cambia d cuando t cambia de manera constante.
- 3 El tipo de cambio que hay entre estas variables, ¿corresponde a algún tipo de relación conocida (función afín, función lineal o proporcionalidad inversa)?

 Respuesta experta

1

	t (segundos)	d (metros)	
$\Delta t = 1$	0	0	$\Delta d = 1$
$\Delta t = 1$	1	1	$\Delta d = 3$
$\Delta t = 1$	2	4	$\Delta d = 5$
$\Delta t = 1$	3	9	$\Delta d = 7$
	4	16	

En esta situación, el cambio de las variables se podría describir de la siguiente manera:

- La variable independiente t cambia de manera constante, aumentando de 1 segundo en 1 segundo, es decir $\Delta t = 1$.
- La variable dependiente d no cambia de manera constante ya que aumenta cada vez más.

2 En esta situación, el cambio de las variables se podría describir de la siguiente manera:

- La variable independiente t cambia de manera constante, aumentando de 1 segundo en 1 segundo, es decir $\Delta t = 1$.
- La variable dependiente d no cambia de manera constante ya que aumenta cada vez más.

3 En base a lo anterior, el tipo de cambio entre las variables no corresponde a ningún tipo de relación ya conocido: no es una función afín, ya que Δd no es constante; tampoco es una función lineal ya que no hay un cociente constante entre los valores, ni una proporcionalidad inversa, ya que no hay un producto constante entre los valores.

GESTION ACTIVIDAD 1

Objetivo

Caracterizar una función cuadrática en base al tipo de cambio que hay entre las variables, identificando un patrón de segundo cambio constante en una tabla.

Trabajo individual

Muestre la animación que muestra cómo la pelota recorre diferentes distancias en intervalos de tiempo constante, a diferencia de la animación del inicio, y de tiempo para que cada estudiante responda la actividad de manera individual. Durante el monitoreo, guíe a los estudiantes para que reconozcan que el cambio de d no es constante pero sí sigue un patrón al aumentar.

Discusión de curso completo

Organice una discusión plenaria para que los estudiantes compartan sus respuestas y guíe una reflexión en la que puedan:

- Comparar las semejanzas y diferencias de esta situación con la situación de la activación. (En ambas situaciones se relacionan las mismas variables d y t , pero ¿en ambas situaciones se relacionan de la misma manera?)
 - Describir un patrón en la forma en que cambia Δd . (Los valores de Δd cuando la pelota rueda por el plano inclinado siguen un patrón: 1, 3, 5, 7, ¿podríamos predecir el siguiente valor? ¿cómo describirías este patrón?)
-

Conclusiones

Conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas clave:

- Identificamos un nuevo tipo de relación entre dos variables, que se caracteriza por un patrón de cambio en el que los cambios constantes de la variable independiente (Δx) producen **segundos cambios constantes** en la variable dependiente ($\Delta\Delta y$).

	t (segundos)	d (metros)	
$\Delta t = 1$	0	0	$\Delta d = 1$
$\Delta t = 1$	1	1	$\Delta\Delta d = 2$
$\Delta t = 1$	2	4	$\Delta d = 3$
$\Delta t = 1$	3	9	$\Delta\Delta d = 2$
$\Delta t = 1$	4	16	$\Delta d = 5$
			$\Delta\Delta d = 2$
			$\Delta d = 7$

- Si una función presenta este tipo de cambio se le denomina **funciones cuadráticas**.

Formalización (Función cuadrática)

Dos variables x e y se relacionan con una **función cuadrática** si los cambios constantes de x (Δx) producen segundos cambios constantes en y ($\Delta\Delta y$).

- El tipo de relación que hay entre dos variables que cambian juntas, se caracteriza por el tipo de cambio que haya entre ellas y no por la naturaleza de las variables.

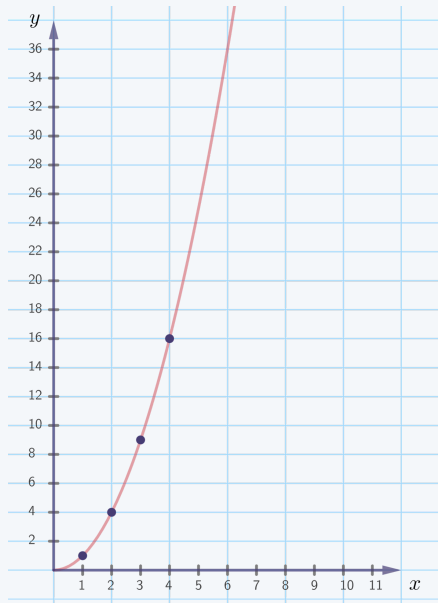
Por ejemplo, en la activación y en esta actividad se relacionan las mismas variables d y t , pero como el tipo de cambio es diferente en cada caso entonces el tipo de relación también es diferente.

Anticipaciones y sugerencias

- Es importante recalcar que **no todos los planos inclinados** permiten obtener los mismos valores de la tabla de esta actividad, ya que si se cambia el grado de inclinación del plano cambiarán los valores de la distancia que recorre la pelota en periodos de 1 segundo. Se profundizará esto en la actividad 3.
- Es posible que algunos estudiantes comprendan, de manera errónea, que el cambio constante de x siempre debe ser de 1 en 1 para producir un segundo cambio constante en y . Si bien en esta actividad solo analizamos un caso donde $\Delta x = 1$, este valor puede cambiar pero siempre debe ser constante.

ACTIVIDAD 2

Ahora vamos a analizar el gráfico de la función cuadrática que relaciona d y t de la situación anterior.



	t (segundos)	d (metros)	
$\Delta t = 1$	0	0	$\Delta d = 1$
$\Delta t = 1$	1	1	$\Delta d = 3$
$\Delta t = 1$	2	4	$\Delta d = 5$
$\Delta t = 1$	3	9	$\Delta d = 7$
	4	16	

$\Delta \Delta d = 2$
 $\Delta \Delta d = 2$
 $\Delta \Delta d = 2$

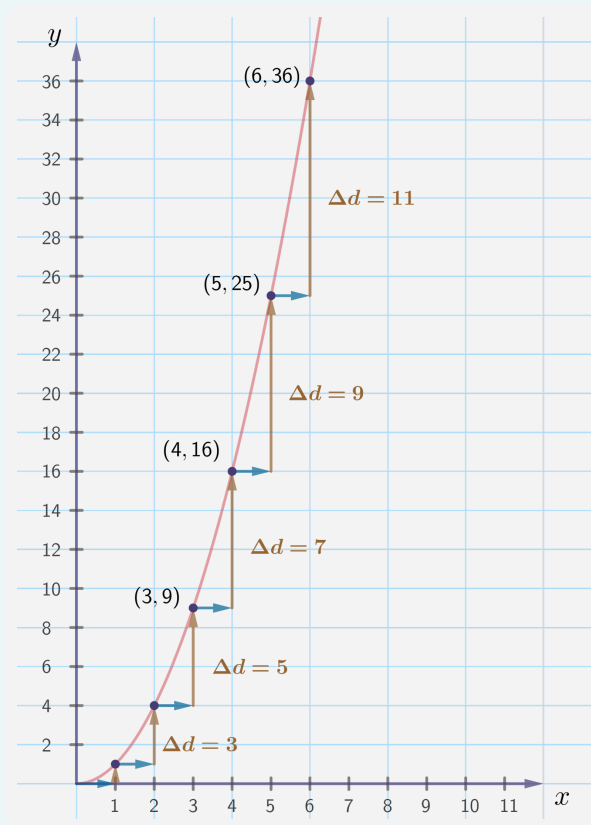
En parejas, respondan en base al gráfico:

- 1 Dibuja flechas horizontales y verticales en el gráfico para representar los cambios de t y d de la tabla.
- 2 Usa las flechas para explicar cómo se observa que el segundo cambio de d ($\Delta \Delta d$) es constante en el gráfico.
- 3 Siguiendo el patrón del segundo cambio constante, ubiquen en el gráfico:
 - a. El punto que corresponde al tiempo $t = 5$.
 - b. El punto que corresponde al tiempo $t = 6$.



Respuesta experta

- 1 Las flechas horizontales tienen la misma longitud de 1 unidad, ya que $\Delta t = 1$, mientras que las flechas verticales son cada vez más grandes, por lo que Δd no es constante.
- 2 En el gráfico se observa que el segundo cambio de d ($\Delta\Delta d$) es constante ya que las flechas verticales aumentan su longitud en 2 unidades respecto a la anterior.
- 3 Sabiendo que $\Delta\Delta d = 2$,
 - a. Entre $(3, 9)$ y $(4, 16)$ $\Delta d = 7$, por lo que entre $t = 4$ y $t = 5$ $\Delta d = 9$. Entonces a $t = 5$ le corresponde el punto $(5, 25)$.
 - b. Siguiendo lo anterior, entre $t = 5$ y $t = 6$ $\Delta d = 11$. Entonces a $t = 6$ le corresponde el punto $(6, 36)$.



GESTION ACTIVIDAD 2

Objetivo

Identificar el patrón de segundo cambio constante en la representación gráfica de una función cuadrática, y utilizarlo para determinar las coordenadas de puntos pertenecientes a su gráfico.

🌱 Trabajo en grupos

Organice a los estudiantes en parejas y presente la actividad completa. Durante el monitoreo, ayude a los estudiantes a dibujar las flechas en el gráfico recordando que:

- La variable t se representa en el eje horizontal, por lo tanto las flechas que representan su cambio (Δt) se dibujan horizontalmente.
- La variable d se representa en el eje vertical, por lo tanto las flechas que representan su cambio (Δd) se dibujan verticalmente.

🌱 Discusión de curso completo

Organice una discusión plenaria para que las parejas puedan compartir sus respuestas, guiando una reflexión en donde:

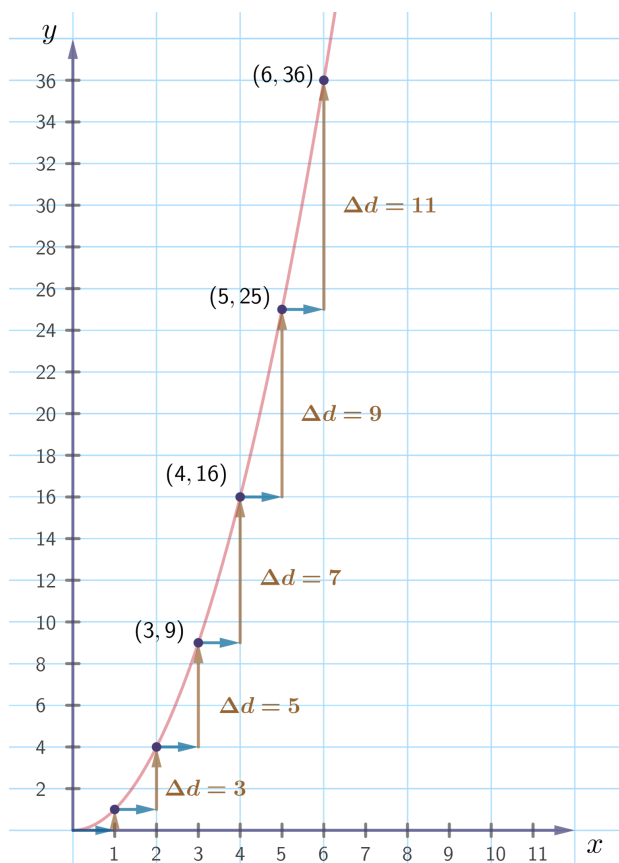
- Describan el patrón de segundo cambio constante a partir de las flechas en el gráfico. (¿Cómo es el cambio de cada flecha vertical respecto a la anterior?)
 - Determinen que a partir del patrón de segundo cambio constante es posible ubicar más puntos en el gráfico de manera recursiva. (Si conozco las coordenadas de un punto, ¿de qué manera se puede ubicar otro punto a partir de él?)
 - Explicar la forma de la curva del gráfico en base al tipo de cambio: a medida que avanza la variable t , el cambio de d aumenta cada vez más. Es decir, el gráfico empieza a empinarse cada vez más y por eso resulta con una forma curva.
-

Conclusiones

Conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas clave:

- Una función cuadrática se representa gráficamente con una curva que se empina cada vez más debido al patrón de segundo cambio constante: las flechas verticales aumentan su tamaño de manera constante.
- Asumiendo que el patrón de segundo cambio constante se mantiene para todos los valores de la función, podemos determinar más puntos de la función a partir de los que ya conocemos.

Por ejemplo, en la función de segundo cambio constante $\Delta\Delta d = 2$ los puntos del gráfico están ubicados a una distancia vertical que aumenta 2 unidades más que la anterior, como se observa en la imagen:



Anticipaciones y sugerencias

- En este trabajo mostramos el valor del segundo cambio constante usando un cambio constante igual a 1 en la variable independiente $\Delta t = 1$. Se podría usar otro valor constante de Δt y también detectaríamos un patrón de segundo cambio constante pero con un valor diferente.
- La forma de la curva de una función cuadrática es una **parábola**, pero en este caso estamos usando una parte del gráfico para observar el patrón de segundo cambio no para caracterizar completamente el gráfico. Sugerimos no mencionar este nombre, ya que podría confundir a los estudiantes. Esto se trabajará en una lección posterior, utilizando un contexto en donde el gráfico esté bien definido para todos los reales y se pueda apreciar el comportamiento parabólico de la curva.
- Si lo estima conveniente, podría guiar una reflexión con los estudiantes para inferir las limitaciones de esta representación gráfica para determinar más puntos de la función, enfocándose en que es una estrategia recursiva en la que se necesita mucha información para conocer las coordenadas de un punto a partir de otro.

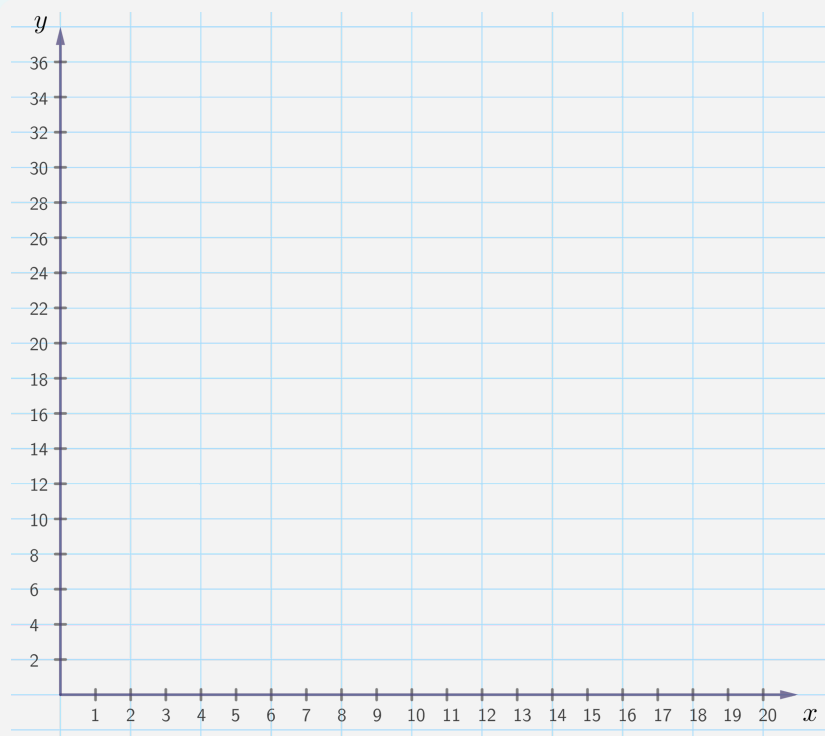
ACTIVIDAD 3

¿Si cambiamos la inclinación del plano se mantiene el mismo tipo de cambio entre las variables?

La siguiente tabla muestra algunos valores de d y t para una pelota que rueda **por un plano que tiene una inclinación distinta** al de la Actividad 1.

Δt	t (segundos)	d (metros)	Δd	$\Delta\Delta d$
	0	0		
	1	2		
	2	8		
	3	18		

- 1 ¿Es constante el segundo cambio de d ($\Delta\Delta d$)? ¿Cuál es su valor?
- 2 Construyan el gráfico que representa esta relación, para ello sigan las instrucciones:
 - a. Ubiquen los puntos de la tabla.
 - b. Representen el patrón de segundo cambio constante.
 - c. Siguiendo el patrón anterior, ubiquen el punto asociado a $t = 4$.



3 Finalmente, concluye: si cambiamos el ángulo de inclinación del plano por el que rueda la pelota, ¿la relación entre d y t es una función cuadrática?

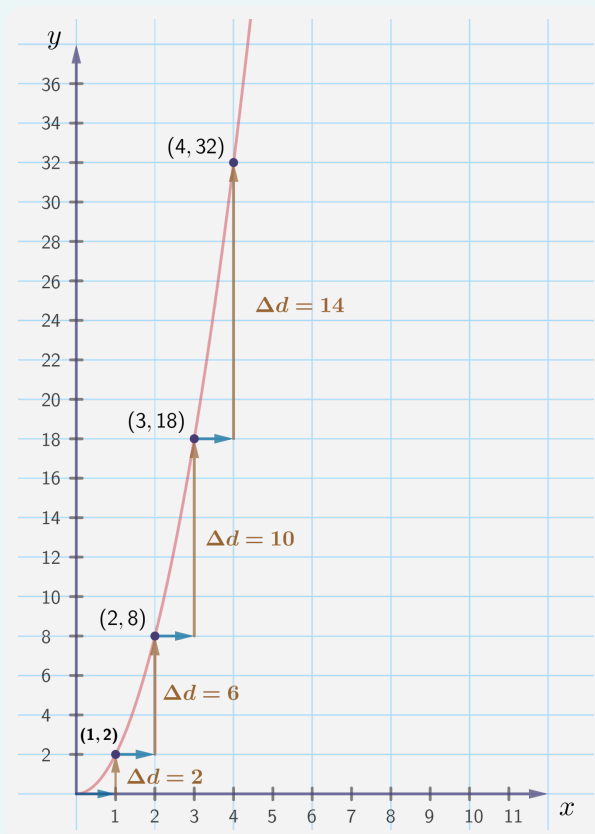


Respuesta experta

1 El valor del segundo cambio constante es $\Delta\Delta d = 4$.

	t (segundos)	d (metros)		
	0	0		
$\Delta t = 1$	1	2	$\Delta d = 2$	$\Delta\Delta d = 4$
$\Delta t = 1$	2	8	$\Delta d = 6$	$\Delta\Delta d = 4$
$\Delta t = 1$	3	18	$\Delta d = 10$	

2 El gráfico que representa esta relación es:



3 Si cambiamos el ángulo de inclinación del plano por el que rueda la pelota se mantiene el tipo de relación entre las variables, ya que sigue existiendo el patrón de segundo cambio constante pero con valor diferente al del ejemplo inicial.

GESTION ACTIVIDAD 3

Objetivo

Reconocer una función cuadrática a partir del cambio de las variables en una tabla, y construir su gráfico.

🌱 Trabajo en grupos

Mantenga las parejas de trabajo y muestre la actividad completa, durante el monitoreo ayude a los estudiantes a construir el gráfico recordando la relación entre las coordenadas de los puntos y el patrón de cambio entre las variables.

🌱 Discusión de curso completo

Organice una discusión plenaria para que los estudiantes repliquen el trabajo de las actividades anteriores en esta nueva situación, identificando un patrón de segundo cambio constante con un valor diferente al anterior.

Conclusiones

Conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas clave:

- Toda función cuadrática sigue un patrón de segundo cambio constante entre sus variables, cuyo valor puede variar según el contexto.

Anticipaciones y sugerencias

- Es posible conectar los contenidos de esta lección con la asignatura de física. Dependiendo de qué tanto manejan los estudiantes los conceptos involucrados, podría guiar un análisis comparativo entre la situaciones de la actividad 1 y la actividad 3 para determinar en cuál de ellas hay un mayor grado de inclinación del plano en base al valor del segundo cambio en cada una.

TICKET DE SALIDA

Consideremos ahora otra situación similar con un plano con una inclinación diferente, donde las variables también se relacionan con una **función cuadrática**.

Analiza los valores de la tabla y responde.

Δt	t (segundos)	d (metros)	Δd	$\Delta\Delta d$
	0	0		
	1	3		
	2	12		
	3	27		
	4	48		

1. ¿Cuál es el valor del segundo cambio constante?

- a. $\Delta\Delta d = 1$
- b. $\Delta\Delta d = 3$
- c. $\Delta\Delta d = 6$
- d. $\Delta\Delta d = 9$

Indicador de
aprendizaje

Identifican el valor del segundo cambio constante en una
función cuadrática

 Posibles comprensiones

Alternativa	Alternativa correcta	Posible interpretación asociada al error
A		Consideran el cambio de la variable independiente ($\Delta t = 1$) para responder.
B		Solo se fijan en el primer cambio de la variable dependiente $\Delta d = 3$ entre $t = 0$ y $t = 1$.
C	X	
D		No calculan correctamente el valor del segundo cambio constante.

CIERRE DE LECCIÓN

En esta lección:

- Aprendimos a identificar un nuevo patrón de cambio entre dos variables, en donde los cambios constantes de la variable independiente producen **segundos cambios constantes** en la variable dependiente. Este tipo de cambio nos permitió caracterizar un nuevo tipo de función: la función cuadrática.

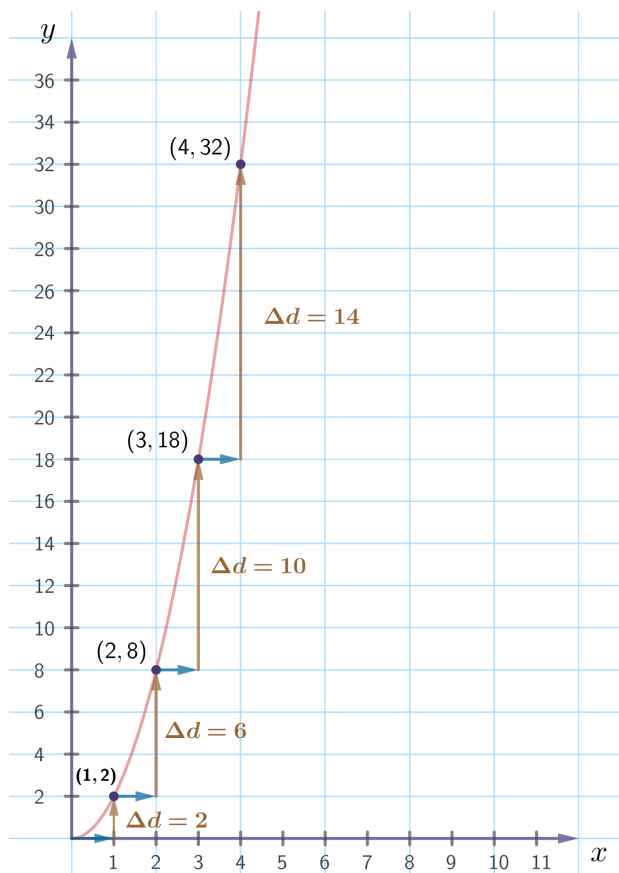
Por ejemplo, en la siguiente tabla el cambio de la variable t es constante $\Delta t = 1$ y la variable d tiene un segundo cambio constante $\Delta\Delta d = 2$.

	t (segundos)	d (metros)	
$\Delta t = 1$	0	0	$\Delta d = 1$
$\Delta t = 1$	1	1	$\Delta d = 3$
$\Delta t = 1$	2	4	$\Delta d = 5$
$\Delta t = 1$	3	9	$d = 7$
$\Delta t = 1$	4	16	

$\Delta\Delta d = 2$
 $\Delta\Delta d = 2$
 $\Delta\Delta d = 2$

- Representamos gráficamente una función cuadrática, utilizando flechas para representar el patrón de segundo cambio constante, lo que se refleja en que mientras el valor de x aumenta de manera constante, el valor de y aumenta cada vez más. Esto implica que la función cuadrática se representa gráficamente con una **curva** que se empina cada vez más.

Por ejemplo, en el siguiente gráfico se observa que las flechas que representan el cambio de x siempre tienen el mismo tamaño, mientras que las flechas que representan el cambio de y son cada vez más grandes; por eso la curva tiene esa forma.



Términos matemáticos que ahora puedo ocupar:

- Segundo cambio constante.
- Función cuadrática.