



MATEMÁTICA CONECTADA

GUÍA DOCENTE

Lección 3 – Unidad Probabilidades

VISIÓN GLOBAL

Objetivo de la lección

Identificar y describir experimentos aleatorios, sus espacios muestrales y sucesos asociados, utilizando lenguaje matemático.

Lugar de la lección en la unidad

En esta primera lección sobre los conceptos básicos de probabilidad, los estudiantes exploran por primera vez la noción de aleatoriedad. El objetivo es que identifiquen las características que definen una situación como aleatoria. Este conocimiento es fundamental para las lecciones posteriores, donde aprenderán a estimar y calcular probabilidades en situaciones aleatorias.

Tareas matemáticas

- T1. Reconocer la naturaleza aleatoria de un juego de azar.
- T2. Anticipar el grado de posibilidad de algunos resultados o sucesos, a partir de la información disponible del experimento aleatorio.
- T3. Determinar experimentalmente el espacio muestral de un juego de azar.
- T4. Comparar el grado de posibilidad de todos los sucesos asociados a un experimento aleatorio.
- T5. Identificar el experimento aleatorio, el espacio muestral y los sucesos asociados a un juego de azar.

Panorama lección

En esta lección, los estudiantes explorarán situaciones aleatorias y formalizarán los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral y suceso por medio de juegos de azar. En la **Actividad 1**, el estudiantado analizará dos juegos de azar, para determinar los resultados posibles y hacer predicciones al respecto. En la **Actividad 2**, se pondrán a prueba dichas predicciones, jugando y registrando los resultados. Finalmente, en la **Actividad 3**, se formalizarán los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral y suceso, a partir del análisis de los juegos abordados en esta clase; además, deberán asignar grados de posibilidad a los sucesos a partir de los resultados obtenidos.

ACTIVIDAD 1

En grupos, leamos las instrucciones para dos juegos y respondamos las preguntas.

Juego 1:

¡Saca cartas y avanza!

Materiales:

Tres cartas de una baraja (dos rojas y una azul).

Preparación: Coloca las tres cartas dentro de una caja, bolsa o estuche donde no se puedan ver. Mezcla bien.

Reglas del juego:

En tu turno, saca una carta sin mirar.

Si la carta es azul (A), no avanzas y tu turno termina.

Si la carta es roja (R), avanzas 1 espacio y vuelves a sacar otra carta.

Repite hasta que saques una carta azul.

¡Gana quien llega más lejos!

Juego 2:

Lanza monedas y avanza

Materiales:

2 monedas iguales.

Reglas del juego:

1- En tu turno, toma la **primera moneda** y lánzala.

2- Si al lanzar la moneda obtienes:

- **Sello (S)**: No avanzas ningún espacio y termina tu turno.

- **Cara (C)**: Avanzas un espacio.

3- Si obtuviste cara, repite el paso 2 con la **segunda moneda**.

¡Gana quien llega más lejos!

1 En el juego 1, ¿qué pasa si sale una carta roja y luego una carta azul?

2 En el juego 2, ¿qué pasa si sale cara y luego sello?

3 Estos juegos, ¿corresponden a situaciones de naturaleza aleatoria? ¿Por qué?



Respuesta experta

(ítem 1.) En ese caso, se avanza solo 1 espacio.

(ítem 2.) En ese caso, se avanza solo 1 espacio.

(ítem 3.) Sí, porque el resultado de cada turno no se puede anticipar con certeza, aun conociendo las reglas del juego.

4 Antes de jugar, anticipen un posible resultado para un turno de cada juego. Anoten los posibles resultados de cada jugador o jugadora.



Respuesta experta

Se espera que los estudiantes identifiquen resultados posibles, por ejemplo: avanzar 0, 1 o 2 espacios, o bien describir las secuencias de cartas o monedas obtenidas.

5 Indiquen si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifiquen su decisión.

Afirmación	V / F
Es imposible conocer, antes de lanzar la moneda, cuál será su cara superior.	
Es imposible conocer, antes de sacar la carta, de qué color será.	
Es posible decir exactamente cuántos espacios se avanzará en un turno del Juego 1.	
Es imposible que un jugador avance 3 espacios en un turno del Juego 2.	
Es seguro que un jugador avanza al menos 1 espacio en un turno del Juego 2.	



Respuesta experta

- V
- V
- F, porque no es posible anticipar con certeza el resultado que obtendrá el jugador.
- V
- F, porque no sabemos si obtendrá cara o sello en el primer lanzamiento; si obtiene sello, no avanza.

GESTION ACTIVIDAD 1

Objetivo

Determinar los posibles resultados y el grado de posibilidad de algunos sucesos conociendo toda la información disponible sobre el experimento aleatorio.

Trabajo en grupos

Organice al curso en grupos de 3 integrantes. Presente los **ítems 1, 2 y 3**, y otorgue un tiempo a los estudiantes para que lean las instrucciones detalladamente.

Discusión de curso completo

Facilite una discusión de curso completo para que compartan sus respuestas. Asegúrese de que sus estudiantes:

- Comprendan las reglas de cada juego (¿En qué casos es posible avanzar un espacio?).
- Reconozcan que no es posible predecir con certeza el resultado en cada turno, aun cuando se conocen las reglas del juego. Por lo tanto, los juegos corresponden a situaciones de **naturaleza aleatoria** (¿Podemos asegurar que alguien, al jugar el primer juego, avance 1 espacio?, ¿se puede anticipar si saldrá cara o sello?)

Trabajo en grupos

Presente los **ítems 4 y 5** y durante el monitoreo, escuche los argumentos que se presentan en los grupos, para determinar si comprendieron el funcionamiento de cada juego.

Discusión de curso completo

Facilite una discusión del curso completo para que compartan sus respuestas. Fomente una discusión en la que el estudiantado:

- Describan los resultados que se podrían obtener en cada uno de los juegos (¿Cuántos espacios es posible avanzar en el juego 1?, ¿cómo se podrían avanzar dos espacios en el juego 2?)
- Distingan entre los grados de posibilidad usando el vocabulario para ello (¿Por qué es posible avanzar un espacio en el juego 1 y no es seguro?)

Conclusiones

Resuma los puntos clave de las discusiones y conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas clave:

- Estos juegos son de naturaleza aleatoria.
- Los resultados posibles pueden describirse de maneras diferentes.

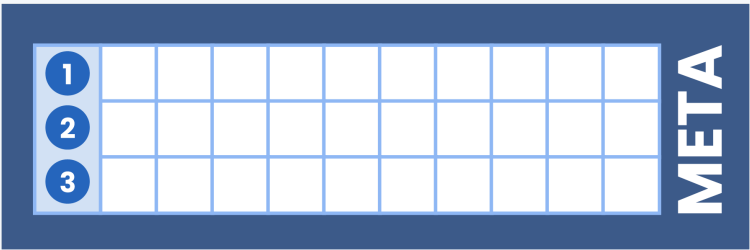
Anticipaciones y sugerencias

Para el ítem 4, pueden existir diferencias en el registro de los resultados posibles de cada juego; por ejemplo, podrían referirse a la cantidad de espacios que avanzan (0, 1 o 2), al orden en que se obtendrán las cartas (RRA, RA, A) o las monedas (CC, CS o S), al hecho de avanzar o no (si avanza o no avanza). Estas diferencias dependen de cómo se defina el experimento aleatorio y el espacio muestral. Oriente a cada grupo a llegar a un consenso para referirse a los resultados posibles.

ACTIVIDAD 2

Jugar y registrar

Juguemos 3 rondas de un juego, siguiendo las instrucciones de la actividad anterior y utilizando el siguiente tablero. **Una ronda termina cuando todos los jugadores han jugado 5 turnos.**



1 Registremos los resultados de cada ronda en una tabla como la siguiente y respondamos las preguntas.

Ronda N° __	Jugador o Jugadora 1	Jugador o Jugadora 2	Jugador o Jugadora 3
Turno 1			
Turno 2			
Turno 3			
Turno 4			
Turno 5			



Respuesta experta

- 1 Respuestas variadas. Se espera que los estudiantes utilicen distintas formas para referirse a los resultados de cada turno. Por ejemplo en el juego de las cartas podrían anotar cosas como A; RA, RRA (refiriéndose a los colores) o bien la cantidad de pasos, 0, 1 o 2, o quizás simplemente anotar si el jugador Avanza o No Avanza en cada turno sin especificar la cantidad de pasos.
- 2 Luego de jugar, ¿ocurrieron los resultados que anticiparon en la Actividad 1? ¿A qué creen que se debe que algunos resultados ocurran y otros no?
- 3 Si juegan otra ronda más, ¿podrían predecir quién ganará? Justifiquen su respuesta.
- 4 A partir de su registro en la tabla anterior, ¿cuáles son todos los posibles resultados para un turno del juego?.



Respuesta experta

- 2 Respuestas variadas.
- 3 No, porque es un juego donde interviene el azar.
- 4 Dado que lo nos interesa observar es la cantidad de espacios que se avanza en un turno, los posibles resultados para un turno son avanzar 2 espacios, avanzar 1 espacio y no avanzar (o "avanzar" 0 espacios).

GESTION ACTIVIDAD 2

Objetivo

Determinar, para un juego de azar, los posibles resultados y el grado de posibilidad de algunos sucesos, a partir de su experimentación.

Trabajo en grupos

Mantenga los grupos de la actividad anterior (3 integrantes); si algún grupo tiene menos integrantes, alguno de ellos deberá jugar dos veces por turno, pues es necesario registrar los resultados de 3 personas. Presente la actividad, pidiendo a los grupos que escojan uno de los juegos descritos en la actividad 1 y que lo jueguen, hasta completar 3 rondas; verifique que haya al menos 2 grupos del curso para cada juego. Asegúrese que cada grupo construye 3 tablas, 1 por cada ronda que jueguen, y que vayan registrando los resultados que obtienen. Una vez que hayan jugado las 3 rondas, pídeles que respondan los **ítems 1, 2 y 3**.

Discusión de curso completo

Facilite una discusión de curso completo para que compartan sus respuestas. Asegúrese de que sus estudiantes:

- Contrasten sus predicciones con lo que realmente ocurrió en el juego (¿Cuántos espacios pensabas que se podía avanzar por turno? ¿Alguien obtuvo ese resultado?).
 - Reconozcan que, a pesar de haber jugado 3 rondas y de comprender las reglas del juego, no es posible predecir con certeza lo que ocurrirá.
 - Puedan describir los 3 resultados posibles para cada juego, ya sea a través de la cantidad de espacios que se avanza, o de alguna forma que el grupo haya consensuado (¿Cuántos resultados posibles hay para cada turno? ¿Cuáles son?)
-

Conclusiones

Resume los puntos clave de las discusiones y conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas clave:

- Si consideramos como resultado **la cantidad de espacios que se avanza en cada turno**, ambos juegos tienen 3 resultados posibles: no avanzar, avanzar 1 espacio y avanzar 2 espacios.
- Para **comparar resultados**, es necesario acordar un tipo de registro común; en este caso, conviene registrar **la cantidad de espacios** que se avanza en vez de registrar, por ejemplo, los colores de cartas obtenidos.

Anticipaciones y sugerencias

Es muy importante guardar los registros de los resultados de cada grupo para la siguiente lección, pues se usarán en actividades posteriores.

El registro de las rondas del juego dependerá del consenso grupal de la actividad anterior. Por lo tanto, si observa muchas diferencias entre los grupos, puede gestionar una discusión ampliada con todo el curso en la que cada grupo comparta sus resultados en la pizarra, o bien combinar dos grupos que hayan experimentado con un juego diferente, para comparar sus resultados.

En el ítem 2, es posible detectar la “falacia del apostador”, una forma de razonamiento erróneo que se presenta frecuentemente en los juegos de azar, que consiste en suponer que las posibilidades de obtener un resultado aumentan, o disminuyen, dependiendo si ese resultado se ha repetido o no anteriormente. Si esto ocurre, contraste con los resultados que obtuvieron, para mostrar que ese razonamiento no se cumple.

ACTIVIDAD 3

1 Completemos la siguiente tabla para cada juego según las definiciones que se han presentado en la clase.

	Experimento aleatorio	Resultados posibles	Espacio muestral
Juego 1 (cartas)			
Juego 2 (monedas)			



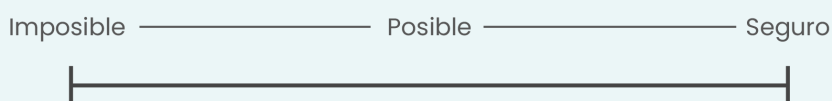
Respuesta experta

	Experimento aleatorio	Resultados posibles	Espacio muestral
Juego 1 (cartas)	Jugar un turno según las reglas del juego y observar cuántos espacios se avanza	Avanzar 0 espacios. Avanzar 1 espacio. Avanzar 2 espacios.	$\{0, 1, 2\}$
Juego 2 (monedas)	Jugar un turno según las reglas del juego y observar cuántos espacios se avanza	Avanzar 0 espacios. Avanzar 1 espacio. Avanzar 2 espacios.	$\{0, 1, 2\}$

2 Considerando los resultados que obtuvieron en su juego, analicen el grado de posibilidad de los resultados posibles ubicándolos en el esquema a continuación.

- a. Avanzar 0 espacios en el Juego.
- a. Avanzar 1 espacio en el Juego.
- b. Avanzar 2 espacios en el Juego.

Nota: Mientras más cerca de “Seguro” se ubique el suceso, es más probable que ocurra. Mientras más cerca de “Imposible” se ubique el suceso, es menos probable que ocurra.



Respuesta experta

Respuestas variadas, dependiendo de los resultados que obtuvieron.

GESTION ACTIVIDAD 3

Objetivo

Identificar, dado un juego de azar, un experimento aleatorio, el espacio muestral asociado, los sucesos posibles y el grado de posibilidad de dichos sucesos.

🗨 Momento expositivo

Comience esta actividad formalizando los conceptos claves de la lección para identificarlos en cada juego: **experimento aleatorio**, **espacio muestral y suceso**. A continuación, se da una definición y un ejemplo que pueden ser útiles para este propósito.

Hablaremos de **experimento aleatorio** para referirnos a cualquier situación de naturaleza aleatoria que se puede repetir bajo las mismas condiciones, es decir, en cada repetición no se puede predecir con certeza su resultado. En un experimento aleatorio, es necesario **describir una acción** y precisar adecuadamente **qué se quiere observar** como resultado del experimento.

Asociado al experimento aleatorio tenemos dos conceptos relevantes:

- **Espacio muestral:** conjunto de todos los posibles resultados del experimento aleatorio.
- **Suceso:** cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, un conjunto de algunos resultados posibles del experimento. A cada suceso le podemos asignar un **grado de posibilidad**.

Veamos un ejemplo de estos conceptos:

- **Experimento aleatorio** : Lanzar un dado de seis caras y observar el valor de su cara superior; en este caso, la acción es "lanzar un dado" y lo que se quiere observar es "el valor de su cara superior".
- **Espacio muestral:** el conjunto de todos los números posibles de obtener al lanzar el dado, es decir, el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Algunos **sucesos** asociados a este experimento son:

- Obtener un 4: $\{4\}$
- Obtener un número par: $\{2, 4, 6\}$
- Obtener un múltiplo de 3: $\{3, 6\}$
- Obtener un número mayor que 3: $\{4, 5, 6\}$

Según lo que nos interesa observar, definimos cada suceso como un subconjunto que contiene los resultados asociados a dicha observación. Note que un suceso puede ser un conjunto vacío, un subconjunto del espacio muestral o el espacio muestral completo.

Trabajo en grupos

Presente la actividad 3, pidiendo a los grupos que analicen los dos juegos y que completen la tabla de esta actividad, usando lo formalizado anteriormente

Discusión de curso completo

Facilite una discusión de curso completo para que compartan sus respuestas. Asegúrese de que sus estudiantes:

- Identifiquen, para cada juego, el experimento aleatorio, escribiendo una acción y precisando lo que se quiere observar.
 - Ubiquen, según los resultados que obtuvieron en sus juegos, los sucesos A, B y C en el esquema de los grados de posibilidad (¿Cuál de estos sucesos ocurrió con mayor frecuencia? ¿Y cuál con menor frecuencia?)
-

Conclusiones

Resuma los puntos clave de las discusiones y conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas clave:

- Al definir un experimento aleatorio y su espacio muestral asociado, es posible determinar sucesos, a los que se les puede asociar un grado de posibilidad.
- Los grados de posibilidad se pueden asignar a partir de la experimentación.

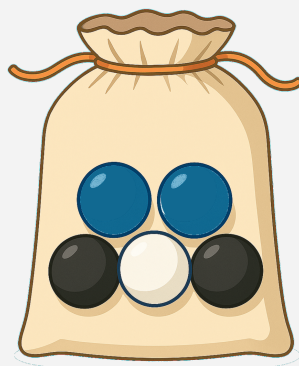
Anticipaciones y sugerencias

Para el ítem 1, tenga en consideración que, como los sucesos son conjuntos de resultados, pueden describirse por comprensión o por extensión; por ejemplo, para el experimento de lanzar un dado, podemos decir que un suceso es “obtener un múltiplo de 2”, o referirnos al conjunto $\{2, 4, 6\}$.

En el ítem 2, es altamente probable que los distintos grupos obtengan esquemas diferentes entre sí. Oriente el trabajo de cada grupo, de manera que ubiquen más cerca de “Imposible” los resultados que obtuvieron con menor frecuencia, y más cerca de “Seguro”, aquellos resultados que obtuvieron con mayor frecuencia. Se espera que en el juego 2, los tres resultados se presenten con frecuencias similares, por lo que podría ocurrir que en un esquema, los 3 sucesos ocupen el mismo lugar.

TICKET DE SALIDA

Se tiene una bolsa (no transparente) donde hay 2 bolitas negras, 2 bolitas azules y 1 bolita blanca, todas de igual peso y tamaño. Se saca una al azar y se observa su color.



Considerando este juego, evalúa cada afirmación, marcando V si es Verdadero y F si es Falso.

Afirmación	V	F
El experimento aleatorio para este juego es sacar una bolita de la bolsa y observar su color.		
Un suceso asociado a este experimento es obtener dos bolitas de distinto color.		
El espacio muestral de este experimento es {azul, negra, blanca}		

Indicador de
evaluación

Reconocer las características básicas de un experimento aleatorio, sus posibles resultados (espacio muestral) y sucesos asociados.

 Posibles comprensiones

Afirmación	Respuesta correcta	Posibles comprensiones asociadas al error
1	V	(Error: F) Los estudiantes podrían considerar que el experimento aleatorio es solo la acción (sacar una bolita) o solo la observación (observar el color), no ambas juntas.
2	F	(Error: F) Confunden el experimento con otro diferente (extraer más de una bolita), o bien, interpretan incorrectamente un suceso como cualquier subconjunto del espacio muestral, sin considerar que debe describir resultados posibles del experimento definido (por ejemplo, asocian {blanca, azul} con “obtener dos bolitas de distinto color”)
3	V	(Error: F) Los estudiantes podrían argumentar que el espacio muestral debería reflejar las cantidades de bolitas, por ejemplo algo como {2,2,1} obviando la observación de interés (color de la bolita)

CIERRE DE LECCIÓN

En esta lección:

- Aprendimos a identificar y describir un **experimento aleatorio** como una situación de naturaleza aleatoria cuyo resultado no se puede predecir con certeza. Al describir un experimento aleatorio es **necesario especificar una acción** y precisar adecuadamente **qué se quiere observar** como resultado de dicha acción.
- Aprendimos a reconocer el **espacio muestral** de un experimento aleatorio, como el conjunto de todos los posibles resultados del experimento; y definimos **suceso** como un subconjunto del espacio muestral, es decir, solo algunas de las posibles observaciones o resultados del experimento.

Ejemplo:

Experimento aleatorio: Lanzar un dado de seis caras y observar el valor de su cara superior; en este caso, la acción es “lanzar un dado” y lo que se quiere observar es “el valor de su cara superior”.

Espacio muestral: el conjunto de todos los números posibles de obtener al lanzar el dado, es decir, el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Algunos sucesos asociados a este experimento son:

- Obtener un 4: $\{4\}$
- Obtener un número par: $\{2, 4, 6\}$
- Obtener un múltiplo de 3: $\{3, 6\}$
- Obtener un número mayor que 3: $\{4, 5, 6\}$

- Por otro lado, jugamos distintos juegos de azar y registramos sus resultados, lo que nos permitió reconocerlos como experimentos aleatorios, identificar sus resultados posibles y analizar **el grado de posibilidad de distintos sucesos**.

Términos matemáticos que ahora puedo ocupar:

- experimento aleatorio
- espacio muestral
- sucesos