MAT CON

MATEMÁTICA CONECTADA

GUÍA DOCENTE

Lección 2 - Unidad Transformaciones Isométricas

fcfm Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas Universidad de Chile

CMMEdu Laboratorio de Educación Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación Gobierno de Chile

Chile Aprende y Avanza Ministerio de Educación

unesco Chile

VISIÓN GLOBAL

Caracterizar la reflexión a partir de sus elementos y características.

Lugar de la lección en la unidad

Esta lección se plantea como segunda clase, comenzando con la reflexión, el estudio específico de las transformaciones geométricas. Se espera que los estudiantes al finalizar la lección hayan desarrollado una noción formal de reflexión, basándose en las ideas de equidistancia y perpendicularidad.

Tareas matemáticas

T1. Explicar cuándo dos figuras se relacionan mediante una reflexión.
T2. Trazar el eje de reflexión que relaciona dos figuras en una cuadrícula.
T3. Describir una estrategia para trazar el eje de reflexión en una cuadrícula.
T4. Reconocer que la recta que une dos vértices correspondientes es perpendicular al eje de reflexión.
T5. Describir una reflexión utilizando los conceptos de equidistancia y perpendicularidad.

Panorama leccion

Esta lección consta de tres actividades. En la **Actividad 1** , a partir de un grupo de figuras dadas en una cuadrícula, los estudiantes identificarán figuras relacionadas mediante una reflexión dibujando también el eje de reflexión (T1 y T2). Luego, en una discusión guiada describirán las estrategias desarrolladas (T3), a partir de las cuales surgirá la noción de equidistancia .

A partir de esta actividad, el docente podrá formalizar la noción de equidistancia , concepto clave que les permitirá formalizar la noción matemática de reflexión.

En la **Actividad 2**, los estudiantes comienzan reconociendo reflexiones. Luego, deben dibujar reflexiones de polígonos en distintas representaciones del plano (con y sin apoyo de una cuadrícula). A partir de este trabajo, se espera que observen que el eje de reflexión y el segmento que une un punto con su respectiva imagen son perpendiculares (T4). Además, se espera que noten que la reflexión mantiene sus características independientemente del tipo de plano en el que se trabaja.

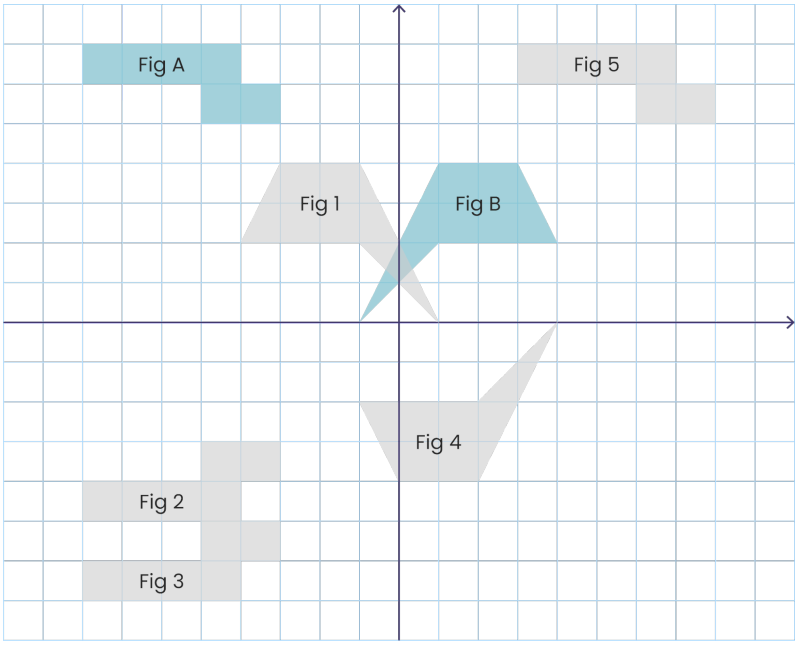
A partir de las actividades anteriores, el docente podrá formalizar la noción de simetral , concepto clave que les permitirá formalizar matemáticamente la noción de reflexión, en la siguiente actividad.

En la **Actividad 3**, los estudiantes construyen una secuencia de pasos que permiten determinar la imagen de un punto respecto de una recta (T5) en un plano euclidiano. Luego de llegar a un consenso en una discusión de curso completo, los estudiantes elaboran una definición de reflexión, en la que relevan las características geométricas e involucran conceptos geométricos vistos anteriormente.

Finalmente, el docente podrá formalizar la reflexión como una transformación geométrica en el plano.

ACTIVACIÓN

Observa las siguientes figuras en el plano. Luego, completa cada afirmación encerrando el número de la figura correspondiente y el eje de reflexión (X o Y).



- La figura 2 3 5 es la imagen de la figura **A** al reflejarla respecto del eje X Y .
- La figura 1 4 se obtiene al reflejar la figura **B** respecto del eje X Y .

Respuesta experta

- La figura **3** es la imagen de la figura A al reflejarla respecto del eje **X** .
- La figura **1** se obtiene al reflejar la figura B respecto del eje **Y** .

GESTION DE LA ACTIVACIÓN

Inicio de la lección

Comience la lección mencionando el objetivo de la clase en un lenguaje informal, por ejemplo: El objetivo de esta clase es que describamos, en términos lo más matemáticos posibles, cómo hacer una reflexión.

Para esto, comenzarán con una actividad que les permitirá recordar algunas ideas geométricas que usarán en la clase.

Guiando la activación

Proyecte la actividad inicial y de tiempo para que la respondan individualmente.

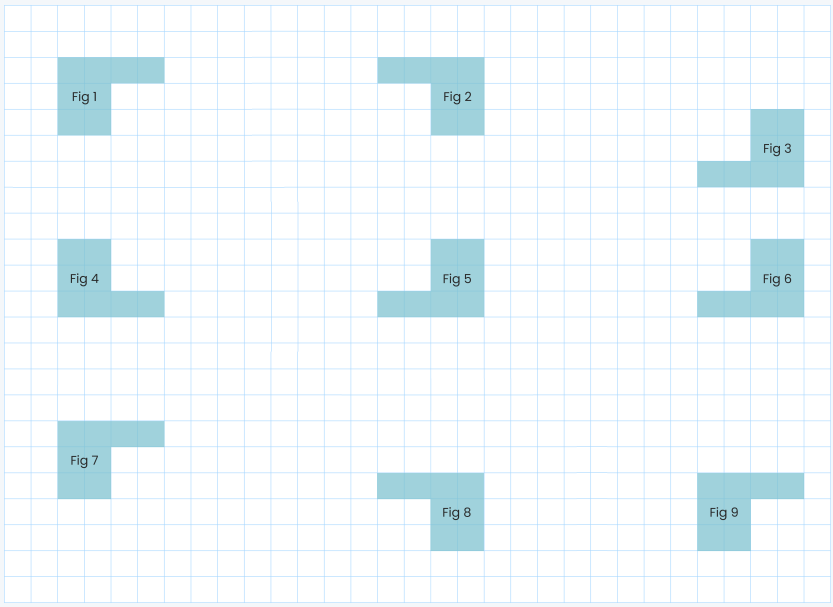
Asegúrese que sus estudiantes, durante la puesta en común:

- Justifiquen sus respuestas.
- Identifiquen correspondientes. Por ejemplo, pídales que los identifiquen en la figura A y su imagen (la figura 3).

Luego, puede dar paso al trabajo con la **Actividad 1** .

ACTIVIDAD 1

En el siguiente grupo hay figuras que corresponden a una reflexión de otra, pero no se sabe cuáles son. Además, tampoco está trazado el eje mediante el cual se hizo la reflexión. Observa las figuras con la intención de encontrar pares de figuras relacionadas mediante una reflexión.



1 ¿Qué pares de figuras están relacionadas mediante una reflexión? Puedes escribir frases como:

- La figura [número] es una reflexión de la figura [número].
- [número] es reflexión de [número].

2 Dibuja el eje de reflexión para cada par de figuras que registraste en **1).**

Respuesta experta

1 ¿Qué pares de figuras están relacionadas mediante una reflexión?

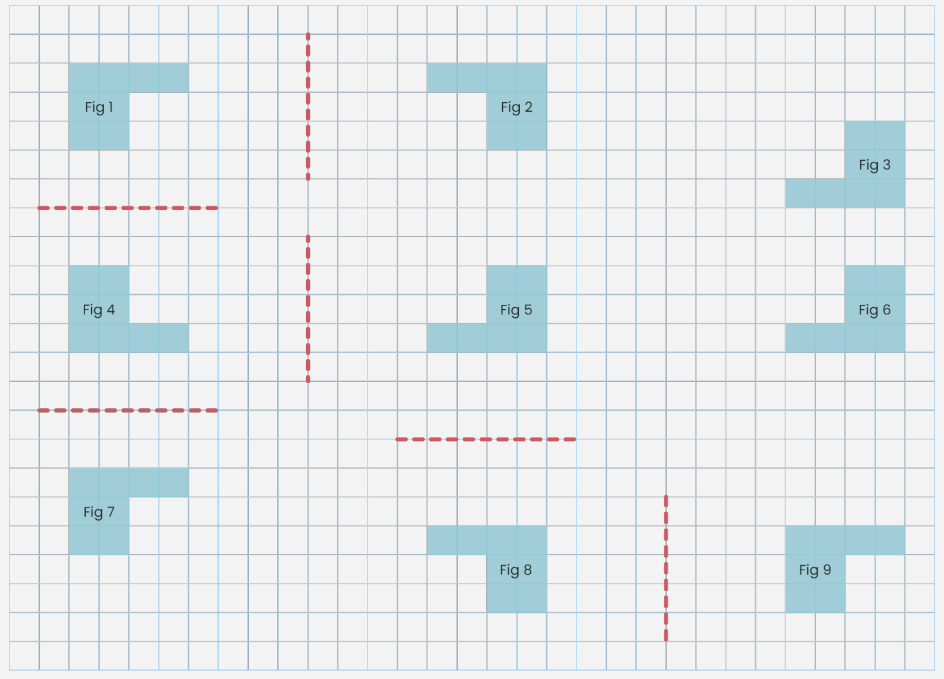
Algunas respuestas posibles

- La figura 1 es una reflexión de la figura 4.
- La figura 4 es una reflexión de la figura 7.
- La figura 5 es una reflexión de la figura 8.

- La figura 1 es una reflexión de la figura 2.
- La figura 4 es una reflexión de la figura 6.
- La figura 8 es una reflexión de la figura 9.

2 Dibuja el eje de reflexión para cada par de figuras que registraste en 1.

Algunas respuestas posibles



GESTION ACTIVIDAD 1

Objetivo

Trazar el eje de reflexión que relaciona dos figuras en una cuadrícula.

Trabajo en grupos

Presente el contexto de la actividad. Luego, organice grupos y entregue las hojas de trabajo. Durante el monitoreo plantee preguntas para que los estudiantes describan qué razones tienen para afirmar cuándo dos figuras se relacionan por una reflexión y de qué manera trazan el eje. En este momento, no valide las estrategias y tampoco dé las respuestas, solo plantee preguntas para indagar en sus razonamientos.

Pase a la siguiente sección una vez que todos hayan dibujado correctamente al menos dos ejes de reflexión.

Discusión de curso completo

Organice una discusión de curso completo para compartir las respuestas del **ítem 1** , centrando la atención en los argumentos que sus estudiantes plantean para decidir cuándo dos figuras se relacionan o no mediante una reflexión y en la estrategia que usan para trazar el eje.

Permita que los estudiantes expresen con sus propias palabras su estrategia para trazar el eje de reflexión, aunque utilicen frases imprecisas como “el eje está en la mitad”, “la línea está en el centro”, “se divide por 2 el total de cuadraditos y se marca una línea”, entre otras. Se recomienda que no corrija estas afirmaciones, pues sus estudiantes están expresando la noción de equidistancia al eje, noción fundamental para comprender la reflexión. Replantee o reoriente estas ideas de una manera más formal que les permita evolucionar su comprensión.

Asegúrese de que sus estudiantes:

- Utilicen correctamente las nociones de reflexión y simetría (ver anticipaciones y sugerencias).
- Tracen de manera precisa el eje de reflexión correspondiente, es decir, cuidando que dos vértices correspondientes sean equidistantes al eje.

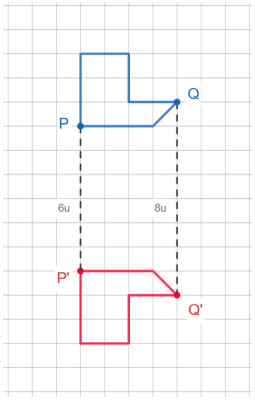
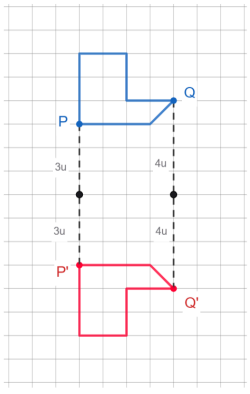
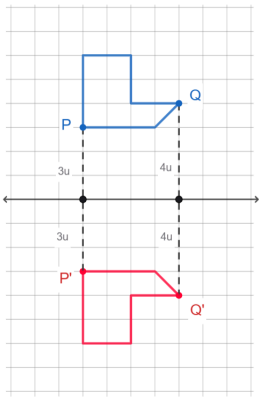
Para incentivar el razonamiento puede plantear preguntas como:

- La estrategia que usaste para determinar cada eje, ¿es similar a la que presentó tu compañero?
- ¿Tu estrategia también sirve para reflejar otros vértices de la figura? ¿Por qué crees que esto ocurre?
- ¿De qué manera puedes comprobar que el eje quedó ubicado correctamente?
- ¿Por qué no se relacionan con reflexión las figuras 3 con 6? ¿Ni 7 con 8?

Conclusiones

Resuma los puntos clave de la discusión y conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas:

- Si dos figuras **están relacionadas mediante una reflexión** y se desconoce cuál es el eje, para determinarlo se puede hacer lo siguiente:

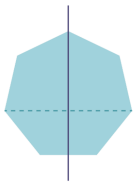
1. Medir la distancia entre, al menos, dos puntos de la figura original y sus imágenes correspondientes.	2. Marcar los puntos medios entre cada punto y su imagen.	3. Trazar una recta que pase por los puntos recién marcados.
		

- En matemática utilizamos el término **equidistancia** para sintetizar la idea de que existe **igualdad de distancia** entre dos o más puntos u otros objetos geométricos. En el caso de la reflexión, se puede decir que:
  - el eje de reflexión equidista de la figura original y de su imagen.
  - dos puntos correspondientes equidistan del eje de reflexión.

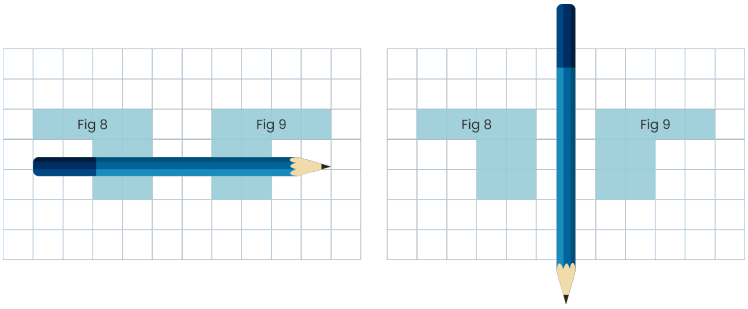
Anticipaciones y sugerencias

Puede haber estudiantes que den por finalizado su trabajo al encontrar solo un par de figuras y su eje. En casos como este, invítelos a justificar por qué otro par de figuras no fueron consideradas como una reflexión.

Es posible que los estudiantes utilicen los términos simetría y reflexión sin distinción. Para distinguirlas, y así promover el uso del lenguaje geométrico, comente que la **simetría** es una característica de una figura, mientras que la **reflexión** es una acción que transforma una figura en otra.

Simetría	Reflexión
La figura es **simétrica**.  Se refleja una parte y esta coincide exactamente con la otra.	Las figuras se relacionan mediante **reflexión**.  La figura **no** es simétrica.

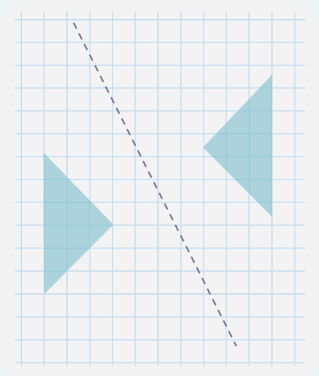
Si hay estudiantes que no desarrollan ninguna estrategia para ubicar el eje, invítelos a utilizar un lápiz como herramienta para representarlo. Muestre con un ejemplo cómo puede "moverse" el eje y formule preguntas que les ayuden a reconocer si la posición del lápiz permite imaginar una figura como el reflejo de la otra.



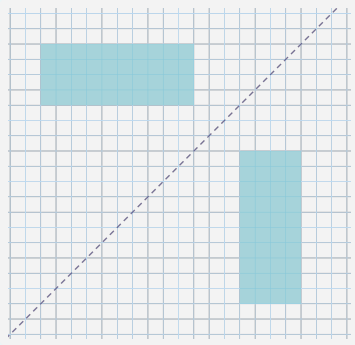
ACTIVIDAD 2

1 ¿Cuáles son reflexiones respecto de la recta L? Considera que puede haber opciones que no muestran reflexiones.

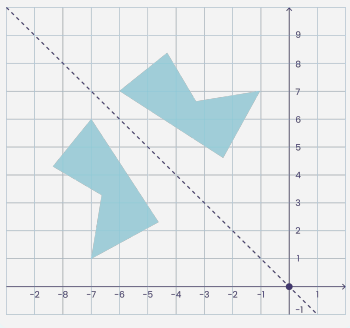
(A)



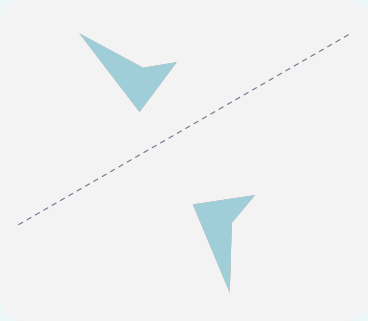
(B)



(C)



(D)



Respuesta experta

(A) No es reflexión.

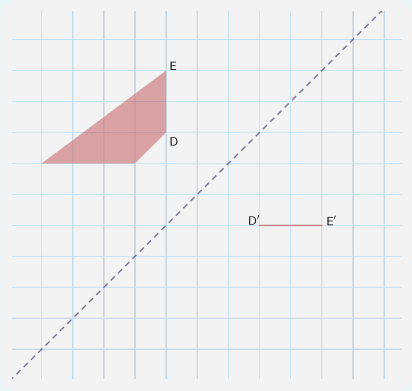
(B) Sí es reflexión.

(C) Sí es reflexión.

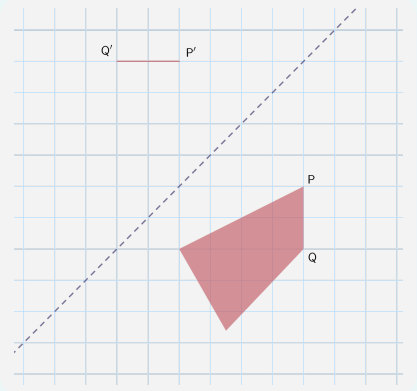
(D) No es reflexión.

2 Completa las siguientes reflexiones respecto de la recta.

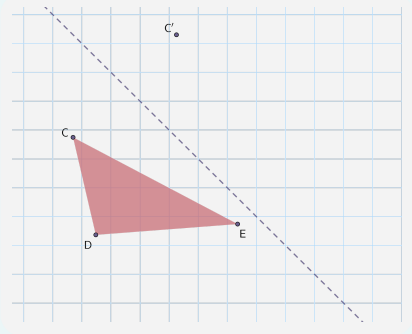
(A)



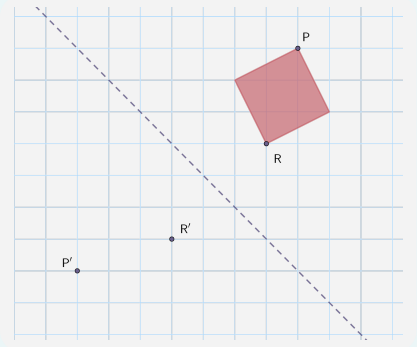
(B)



(C)

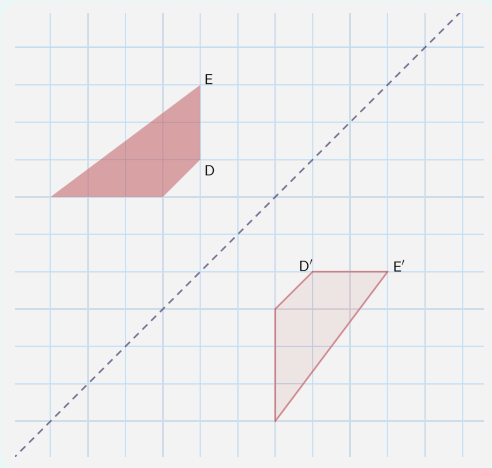


(D)

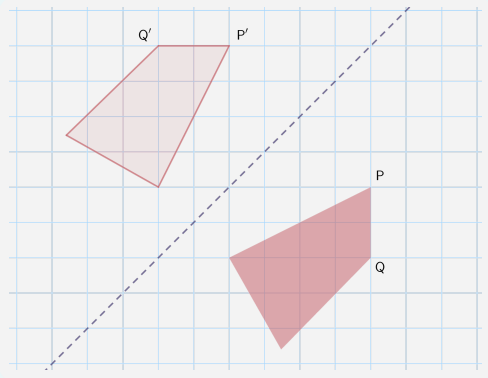


Respuesta experta

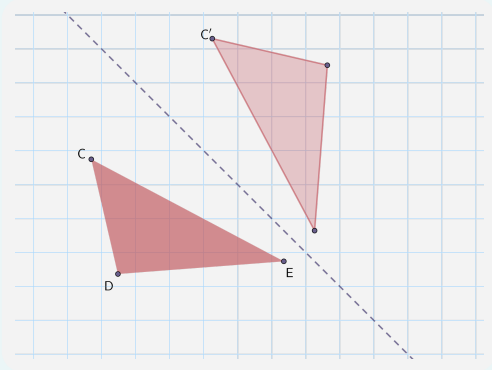
(A)



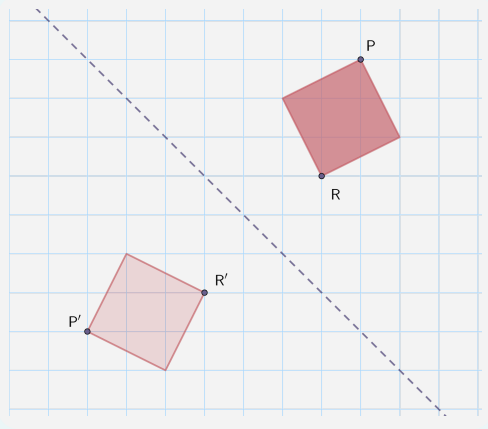
(B)



(C)



(D)



GESTION ACTIVIDAD 2

Objetivo

Reconocer que la recta que une dos vértices correspondientes en una reflexión es perpendicular al eje de reflexión.

Trabajo en grupos

Proyecte el **ítem 1** e indique que lo importante serán las justificaciones de por qué cada caso constituye o no una reflexión. Plantee preguntas para que los estudiantes detallen cómo comprobaron si se trataba o no de una reflexión. Reconozca explícitamente cuando involucran criterios geométricos en sus explicaciones. Por ejemplo, pueden descartar la alternativa (D) afirmando que no se observa equidistancia, aunque las figuras sí parecen estar reflejadas. Se sugiere que no valide aún las respuestas, y que las deje registradas en un lugar visible, con el fin de retomarlas al finalizar el trabajo del **ítem 2** .

Entregue las hojas de trabajo del **ítem 2** . Considere que las figuras de este ítem están elegidas con la intención de que la perpendicularidad aparezca como un concepto cada vez más necesario en la reflexión:

- En (A) se visualiza la imagen de dos vértices y el segmento entre ellos, sobre un cuadriculado.
- En (B) se muestra la imagen de dos vértices. Uno de los restantes no está en la intersección de la cuadrícula.
- En (C) se muestra la imagen de tres vértices, ninguno de ellos está en la cuadrícula.
- En (D) se muestra la imagen de dos vértices en un plano euclidiano. Se espera que en este caso, no puedan evitar trazar rectas perpendiculares. Puede sugerir el uso de instrumentos.

Discusión de curso completo

Organice una discusión de curso completo en la que, a partir de las producciones de sus estudiantes, pueda relevar la noción de perpendicularidad entre el eje y el segmento que une dos puntos correspondientes.

Asegúrese de que sus estudiantes:

- Utilicen el término "equidistancia" (¿Qué término podríamos usar para decir que dos puntos están a la misma distancia del eje de reflexión?).
- Etiqueten los puntos correspondientes correctamente (¿Cómo podríamos nombrar o etiquetar cada punto y su imagen para que todos sepamos a cuáles nos referimos?).
- Utilicen algún instrumento para trazar segmentos y medir distancias (¿Cómo podríamos trazar el segmento que une un punto con su imagen?).

Conclusiones

Resuma los puntos de las discusiones y conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas clave:

- Hemos notado que el **eje de reflexión** tiene la característica de ser perpendicular a todos los segmentos que unen un punto con su imagen correspondiente.
- En matemática utilizamos el término **simetral** para referirnos a una recta que: es perpendicular al segmento que une dos puntos correspondientes, y al mismo tiempo lo divide en dos segmentos de igual longitud.

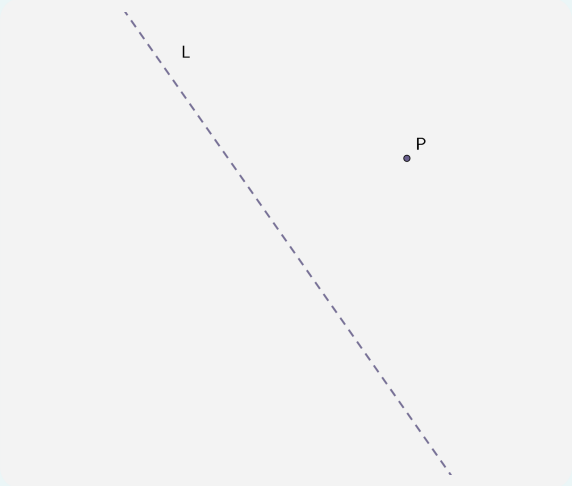
Anticipaciones y sugerencias

Respecto a los pares de figuras en el **ítem 1** , pueden surgir los siguientes errores o dificultades conceptuales:

- En (A), los estudiantes podrían afirmar que es una reflexión al considerar solamente un "cambio de sentido". Puede plantear preguntas para indagar si consideraron el eje de reflexión y las distancias entre dos vértices correspondientes.
- En (B), podrían indicar que las figuras están relacionadas mediante una rotación, y que dos figuras no pueden relacionarse por más de una transformación.
- En (C), dado que los vértices del triángulo no están en la intersección de la cuadrícula, puede ocurrir que sus estudiantes afirmen que no pueden asegurar que existe una reflexión.
- En (D) los estudiantes podrían afirmar que es una reflexión sin verificar las distancias de puntos correspondientes al eje de reflexión.

ACTIVIDAD 3

1 Refleja el punto P respecto de la recta L. Deja marcadas todas tus construcciones intermedias.



2 Describe, con tus propias palabras, una secuencia de pasos para determinar la ubicación de P', que corresponde a la imagen de P respecto de la recta L.

Respuesta experta

- Trazar una perpendicular al eje de reflexión, que pase por el punto P.
- Medir la distancia desde el eje de reflexión a P, sobre la recta recién trazada.
- Copiar la distancia anterior y marcarla en el lado del plano en donde no está P.
- La marca anterior es P'.

GESTION ACTIVIDAD 3

Objetivo

Describir una reflexión utilizando los conceptos de equidistancia y perpendicularidad.

Trabajo en grupos

De un tiempo a los estudiantes para que, en grupos, determinen la imagen del punto al reflejarlo respecto de L. Destaque que no es necesario que la construcción sea exacta, aunque deben intentar realizarla con precisión. El foco de esta actividad no está únicamente en determinar la imagen del punto, sino en describir, de la manera más precisa posible, los pasos necesarios para obtenerla.

Discusión de curso completo

Inicie una discusión de curso completo que permita consensuar los pasos necesarios y suficientes para determinar la imagen de un punto. En este proceso es clave que promueva el uso de lenguaje matemático preciso ya que los estudiantes están construyendo una definición formal de reflexión.

En la construcción de la definición formal asegúrese que sus estudiantes conceptualicen la reflexión de manera geométrica utilizando también lenguaje apropiado como perpendicularidad, correspondencia, puntos equidistantes al eje, etc.

Luego de haber analizado las respuestas con sus estudiantes, plantee qué ocurriría si el punto que se quiere reflejar está sobre el eje de reflexión. Oriente la conversación para que reconozcan que en ese caso, un punto y su imagen correspondiente, tienen la misma posición.

Conclusiones

Resuma los puntos de las discusiones y conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas clave:

- Una secuencia de pasos para determinar la imagen de P es la siguiente:
  - Trazar una perpendicular al eje de reflexión, que pase por el punto P.
  - Medir la distancia desde el eje de reflexión a P, sobre la recta recién trazada.
  - Copiar la distancia anterior y marcarla en el lado del plano en donde no está P.
  - La marca anterior es P’.

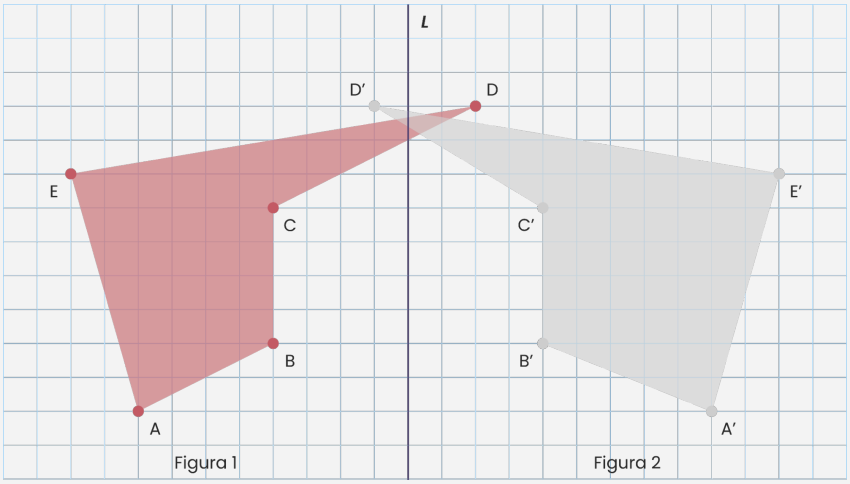
Anticipaciones y sugerencias

Puede haber estudiantes que identifiquen P’ doblando la hoja sobre la recta L. En casos como este, motívelos a buscar una forma en la que no pueda hacer pliegues, que le permita describir el proceso en términos, por ejemplo, del uso de instrumentos como regla y compás.

Es posible que haya estudiantes que no describen una secuencia de pasos. Puede orientarlos planteando preguntas como: ¿Qué harías en primer lugar? Una vez terminado lo anterior, ¿con qué continuarías?

TICKET DE SALIDA

Mariana no está segura de que la figura 2 sea la reflexión de la figura 1, mediante la recta L.



¿Cuál(es) de la(s) siguientes afirmaciones te permiten ayudar a Mariana a decidir si se trata o no de una reflexión?

a. Todos los puntos de la figura 1 tienen su correspondiente imagen en la figura 2. Por ejemplo A' es la imagen de A.

b. Aunque CB = C'B', la distancia CE es menor que C'E'.

c. Si bien C y C' son equidistantes a L, ocurre que A y A' **NO** lo son.

Indicador de evaluación	Identifican características de la imagen al reflejar una figura.

Posibles comprensiones

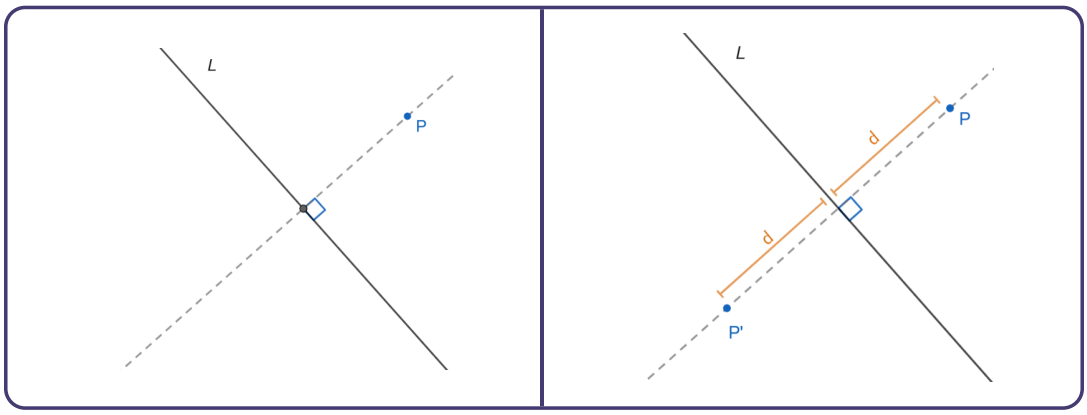
Afirmación	Respuesta correcta	Posibles comprensiones asociadas
A)		Reconoce que la figura 2 es imagen de la figura 1, basándose en la similaridad de las formas, sin verificar que las distancias de los puntos correspondientes sean iguales, respecto de la recta L.
B)	X	
C)	X	

CIERRE DE LECCIÓN

En esta lección:

- Exploramos los elementos que definen geométricamente una **reflexión** en el plano.
- Definimos un proceso para reflejar un punto P respecto de un eje de **reflexión L** , que podemos organizar de la siguiente manera:

1. Si el punto **P está en la recta L** , entonces, P y P' tienen la misma posición en el plano.
2. Si el punto **P no está en la recta L** , entonces, se puede determinar P' de la siguiente manera:
   - Trazar una perpendicular al eje de reflexión, que pase por P.
   - Medir la distancia entre el eje de reflexión y P.
   - Copiar la distancia anterior y marcarla en el sector del plano donde no está P.
   - La marca anterior es P'.



Términos matemáticos que ahora puedo ocupar:

- Reflexión
- Eje de reflexión
- Perpendicular
- Simetral