



MATEMÁTICA CONECTADA

GUÍA DOCENTE

Lección 4 – Unidad De Transformaciones Isométricas

VISIÓN GLOBAL

Objetivo de la lección

Trasladar figuras de manera pictórica y simbólica en el plano cartesiano.

Lugar de la lección en la unidad

Esta es la cuarta lección de la secuencia. Con esta lección se completa el ciclo de estudio de las transformaciones de manera individual. Adicionalmente, esta lección abre paso al uso de las coordenadas en las transformaciones.

Tareas matemáticas

- T1. Determinar la imagen de un punto dado un vector de traslación sumando los componentes del vector a los componentes del punto.
- T2. Explicar por qué sumar los componentes de un vector $\vec{u}$ a un punto permite obtener la imagen de dicho punto bajo la traslación $\vec{u}$.
- T3. Determinar un vector de traslación por medio de una resta entre las coordenadas correspondientes de un punto y su imagen.

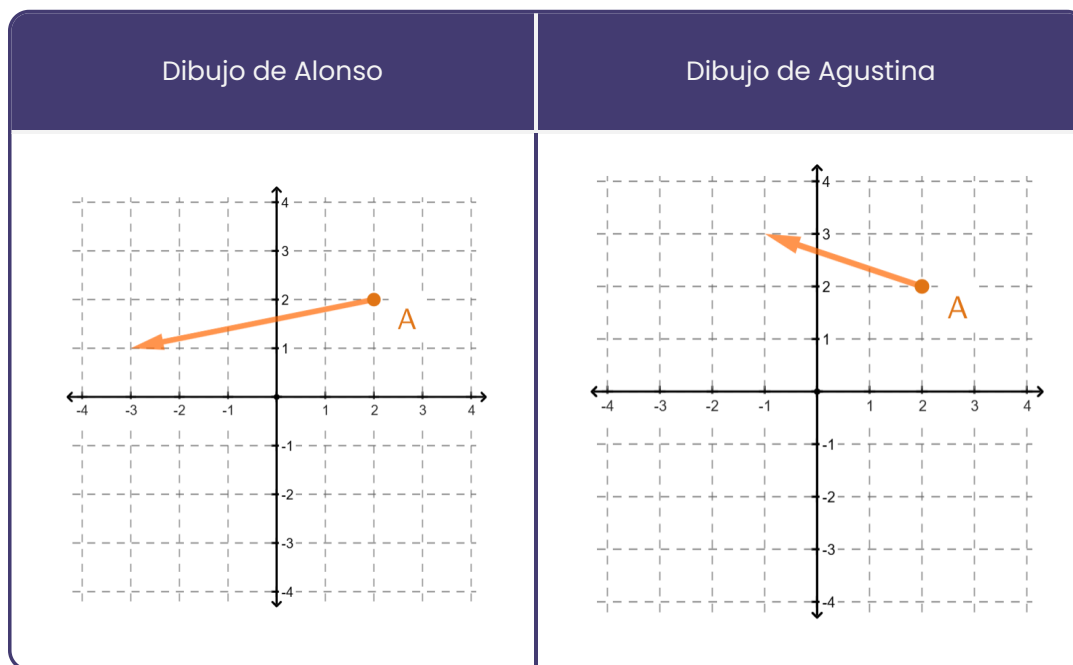
Panorama lección

Esta lección toma un camino diferente a las lecciones previas. La **Actividad 1**, aborda problemas de traslaciones con un foco en puntos en vez de figuras. A partir de esta actividad los estudiantes establecerán un procedimiento para determinar la imagen de un punto bajo una traslación de manera simbólica (T1 y T2).

En la **Actividad 2**, se plantean ejercicios en los que los estudiantes deben utilizar el procedimiento identificado en la actividad anterior, pero ahora en el contexto de problemas con figuras. En esta actividad los estudiantes descubren que el procedimiento establecido para llevar a cabo una traslación puede ser también usado para determinar un vector de traslación desconocido (T3).

ACTIVACIÓN

La profesora le pidió a sus estudiantes que desde el punto A, dibujaran el vector $\vec{t} = (-3, 1)$. Al comparar sus respuestas, Alonso y Agustina se dieron cuenta que lo dibujaron de distinta manera:



Identifica quién de los dos cometió un error y explícalo brevemente

GESTION DE LA ACTIVACIÓN

Inicio de la lección

Se sugiere comenzar mencionando el objetivo de la clase a los estudiantes en un lenguaje informal, por ejemplo: En esta clase aprenderemos cómo aprovechar el plano cartesiano para llevar a cabo traslaciones de manera más sencilla.

Guiando la activación

Presente la siguiente actividad a sus estudiantes y asegúrese de que sean capaces de reconocer el error de Alonso y describirlo por medio de la caracterización de un vector: representa un desplazamiento, no una posición absoluta.

Lo que debemos recordar para esta lección

Utilice las respuestas de esta actividad para conectar con los términos e ideas matemáticas abordadas en la lección 1 .

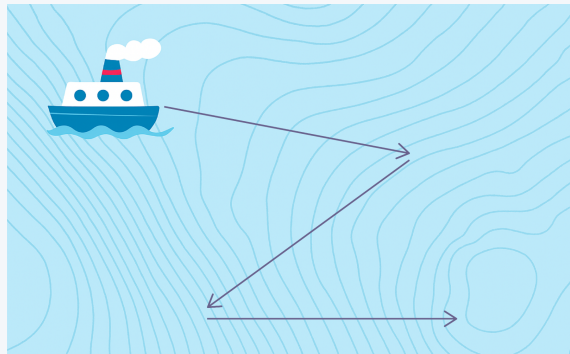
- En un vector, los componentes muestran cuánto se desplaza en X e Y a partir del punto inicial.
- Un vector se representa como $\vec{t} = (x, y)$. Las componentes x e y de un vector se interpretan como desplazamientos, en donde:
 - el valor de x corresponde a un desplazamiento horizontal,
 - el valor de y como uno vertical.

ACTIVIDAD 1

Notas sobre la notación de vectores

Un vector puede representarse con cualquier letra y una flecha arriba, por ejemplo, $\vec{v}$. Generalmente, usamos la letra **v** (por "vector") o **w** (porque es la siguiente en el abecedario). Sin embargo, a veces es útil elegir una letra relacionada con el contexto.

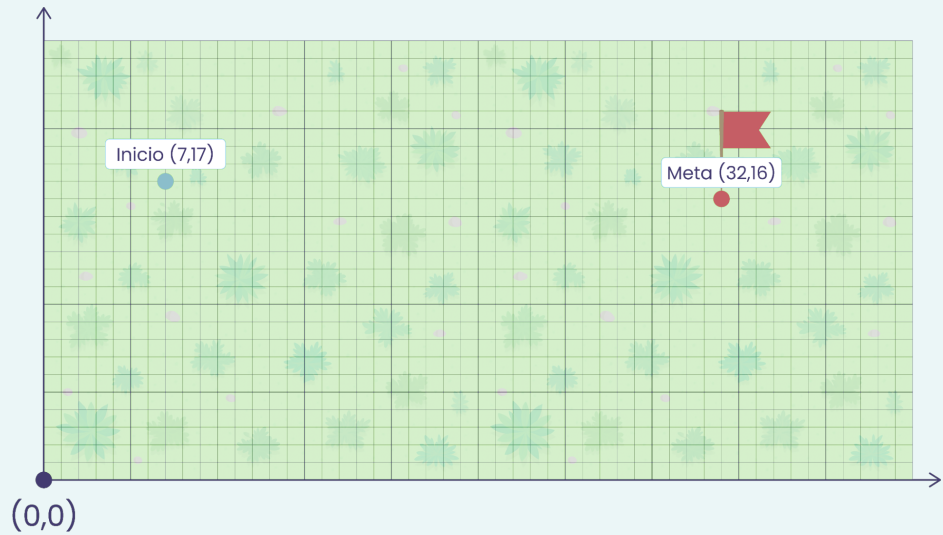
Imagina que estamos estudiando los movimientos de un barco. Podríamos llamar **b** al primer vector. Sin embargo, si usamos muchos vectores, las letras pueden no ser suficientes, ¿cómo nombramos a los demás? ¿Y si tenemos cientos de vectores?



En este tipo de casos se acostumbra a utilizar **subíndices**, es decir, escribimos un número pequeño en la esquina inferior derecha de la letra. Esto nos ayuda a ordenar y distinguir los vectores fácilmente. Por ejemplo:

$$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \dots, \vec{b}_{100}$$

Torneo de Golf de las Matemáticas



- 1 En los siguientes ítems analizaremos la información obtenida de un torneo de golf con cuatro competidores. Para responder las preguntas puedes apoyarte con el mapa.
- a. En la siguiente tabla se encuentra la información del vector de traslación del primer tiro de los competidores. Considerando que todos comienzan en el inicio:
 - a. Dibuja los vectores de traslación correspondientes al primer tiro de cada jugador en el mapa.

	Renato Descartes	Carlos Gauss	Leonardo Euler	Ada Love
Primer tiro	$\vec{d}_1 = (5, 4)$	$\vec{g}_1 = (20, 0)$	$\vec{e}_1 = (28, 0)$	$\vec{l}_1 = (18, -2)$
Posición pelota	(12, 21)	(____, ____)	(____, ____)	(____, ____)



Respuesta experta

1

	Renato Descartes	Carlos Gauss	Leonardo Euler	Ada Love
Primer tiro	$\vec{d}_1 = (5, 4)$	$\vec{g}_1 = (20, 0)$	$\vec{e}_1 = (28, 0)$	$\vec{l}_1 = (18, -2)$
Posición pelota	(12, 21)	(27, 17)	(35, 17)	(25, 15)

2 Un compañero describe su procedimiento para resolver el problema anterior, pero no está seguro de por qué funciona.

- Explica en tus palabras por qué este procedimiento es correcto.
- Haz un dibujo para apoyar tu explicación.

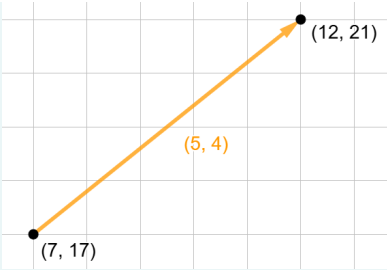
"A mi me dijeron que debía sumar el vector y el punto así que lo hago así:"

$$\begin{aligned} \text{Punto inicial } (7, 17) \\ \text{Tiro: } \vec{t} = (5, 4) \\ \text{Posición pelota: } (5+7, 17+4) = (12, 21) \end{aligned}$$



Respuesta experta

2 El vector representa el desplazamiento en X e Y. Si el primer componente del vector es 5 entonces la posición de la pelota en X será 5 unidades más que la actual, es decir $7 + 5$. Lo mismo para la coordenada en Y.



3 Analicemos la información de los primeros tres golpes de Renato Descartes y Ada Love. ¿Llega alguno a la meta?

	Renato Descartes			Ada Love	
	Tiros	Posición Pelota		Tiros	Posición Pelota
1	$\vec{d}_1 = (5, 4)$	(12, 21)	1	$\vec{l}_1 = (18, -2)$	(,)
2	$\vec{d}_2 = (30, 0)$	(,)	2	$\vec{l}_2 = (10, -2)$	(,)
3	$\vec{d}_3 = (-3, -4)$	(,)	3	$\vec{l}_3 = (4, 3)$	(,)



Respuesta experta

3

Sí, Ada Love llega a la meta.

Renato Descartes		
	Tiros	Posición Pelota
1	$\vec{d}_1 = (5, 4)$	(12, 21)
2	$\vec{d}_2 = (30, 0)$	(42, 21)
3	$\vec{d}_3 = (-3, -4)$	(39, 17)

Ada Love		
	Tiros	Posición Pelota
1	$\vec{l}_1 = (18, -2)$	(25, 15)
2	$\vec{l}_2 = (10, -2)$	(35, 13)
3	$\vec{l}_3 = (4, 3)$	(39, 16)

4

Carlos Gauss ganó el torneo ya que llegó a la meta con solo dos golpes. Determina el vector de traslación de su segundo golpe y explica tu procedimiento.

Carlos Gauss		
	Tiro	Posición Pelota
1	$\vec{g}_1 = (20, 0)$	(,)
2	$\vec{g}_2 = (,)$	(32, 16)



Respuesta experta

4

Carlos Gauss ganó el torneo ya que llegó a la meta con solo dos golpes.

Determina el vector de traslación de su segundo golpe y explica tu procedimiento.

Carlos Gauss		
	Tiro	Posición Pelota
1	$\vec{g}_1 = (20, 0)$	(27,17)
2	$\vec{g}_2 = (5, -1)$	(32, 16)

Si el segundo golpe tiene como vector:

(x, y) entonces:

$$(27, 17) + (x, y) = (32, 16)$$

Entonces:

$$27 + x = 32 \rightarrow x = 5$$

$$17 + y = 16 \rightarrow y = -1$$

GESTION ACTIVIDAD 1

Objetivo

Llevar a cabo una traslación de manera simbólica con apoyo de un plano cartesiano.

Trabajo en grupos

Presente el contexto de la situación a los estudiantes e introduzca las observaciones respecto a la notación de vectores. Entregue a cada estudiante una copia del mapa de la cancha de golf e indique que servirá de apoyo a lo largo de la **Actividad 1**.

Entregue la hoja con los ítems 1, 2 y 3. El objetivo de estos ítems es que los estudiantes puedan desarrollar la estrategia de sumar los componentes correspondientes de un vector de traslación y un punto para obtener su imagen.

Los ítems buscan de manera natural incentivar el trabajo con las coordenadas, pero puede que los estudiantes se limiten a hacer las traslaciones solo dibujando el vector y luego contando los cuadrados para determinar las nuevas coordenadas sin buscar una estrategia distinta. Durante el monitoreo puede incentivar que los estudiantes internalicen una estrategia que considere de manera más explícita las estrategias con preguntas como:

- ¿Siempre podrás dibujar el vector? ¿qué pasa si el mapa llega hasta el punto (1000, 1000)?
- ¿Qué pasa si es que te das cuenta que había un error en la coordenada de inicio, debemos hacer todo de nuevo o podemos ajustar nuestras respuestas?

Durante el monitoreo, haga una nota mental de parejas que hayan resuelto el ítem 2 de maneras distintas para invitarlos a explicar su método luego en la puesta en común. Asegúrese de que las explicaciones de los estudiantes utilicen el vocabulario asociado a las traslaciones (desplazamiento, traslación, coordenada, etc.).

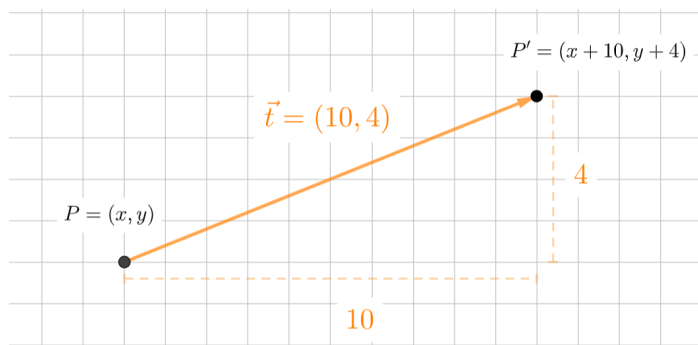
Discusión de curso completo

Durante la discusión grupal invite a que distintas parejas expliquen sus estrategias para resolver el ítem 2.

Invite también a algunos estudiantes a leer las explicaciones que dieron en el ítem 3. En este momento también puede preguntar si es que ellos se dieron cuenta de ese procedimiento también y cómo lo formalizarían.

Conclusiones

Resuma los puntos clave de las discusiones y conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas:



Ya que un **vector de traslación** indica la cantidad de desplazamiento en **X** y en **Y**, se pueden determinar las coordenadas de un punto bajo una traslación sumando a las coordenadas del punto el desplazamiento en **x** e **y**, respectivamente. indicados en el vector.

Anticipaciones y sugerencias

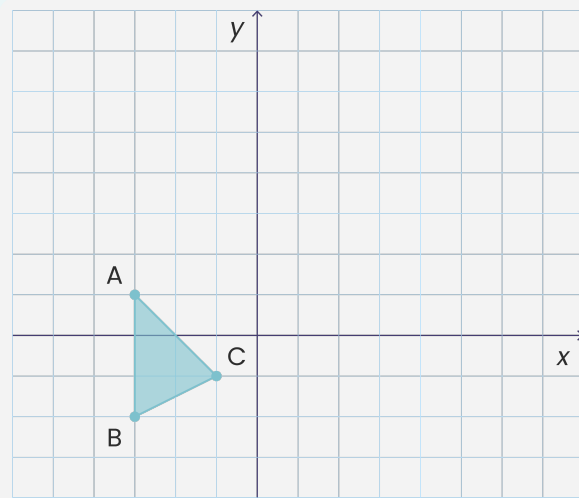
Los ítems 1 y 2 pueden resolverse utilizando solo el mapa, un estudiante podría no encontrar la necesidad de determinar una estrategia más sistemática hasta el ítem 3. En este caso será importante distribuir los tiempos de manera acorde. Se aconseja discutir el ítem 3 y luego probar ese procedimiento en los ítems 1 y 2 para verificar su efectividad.

Los estudiantes podrían, al usar el mapa, contar los cuadrados uno a uno. Durante su monitoreo identifique estos casos e invítelos a utilizar estrategias de conteo (por ejemplo, contando de 5 en 5).

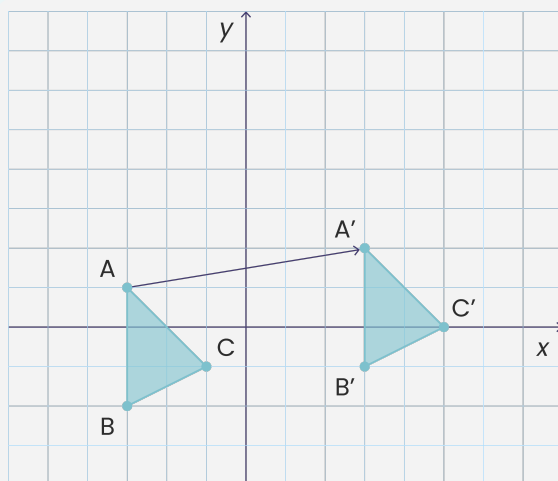
ACTIVIDAD 2

1 El triángulo ABC se trasladó según un vector $\vec{t}$ formando el triángulo A'B'C'. Si sabemos que $A'=(3,2)$

- Dibuja el triángulo A'B'C'.
- Determina el vector de traslación.



Respuesta experta



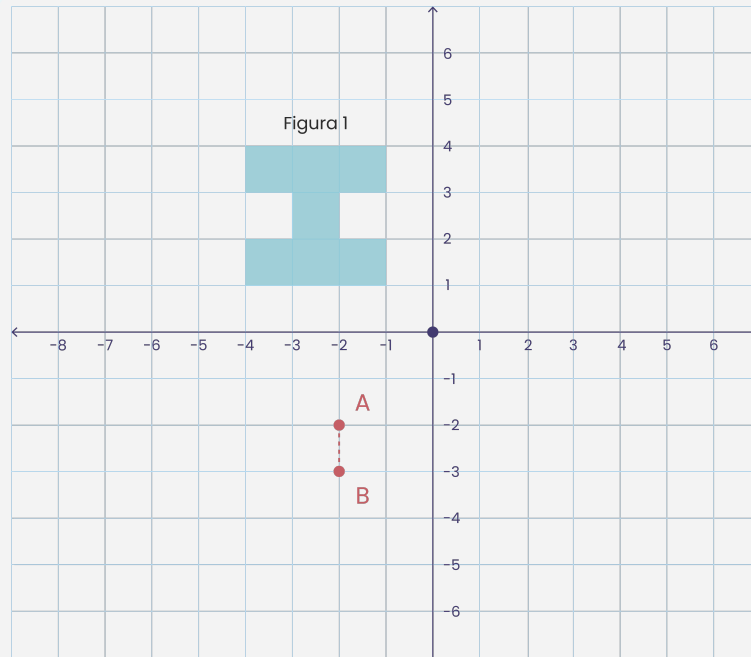
El vector de traslación es $(6, 1)$.

Esto puede calcularse visualmente uniendo A con A' o resolviendo la siguiente expresión:

$$(-3, 1) + (x, y) = (3, 2)$$

2 Un compañero quiere trasladar la figura 1 de manera que alguno de sus lados coincida con el segmento AB.

- ¿Cuántas traslaciones distintas pueden hacerse?
- Determina los vectores de traslación de dos de las posibles traslaciones.



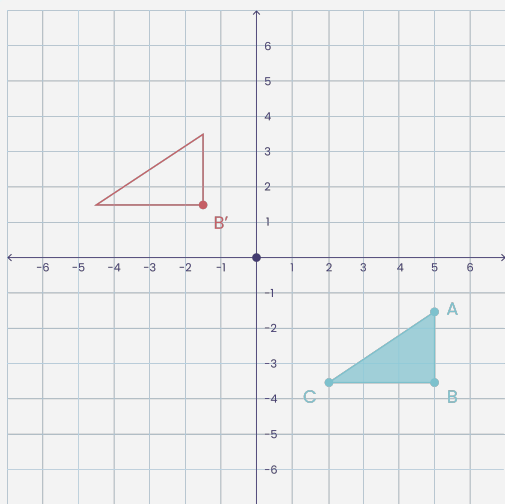
Respuesta experta

a. Se puede hacer de 6 maneras distintas.

b. Vectores posibles:

$$(0, -5) \quad (-1, -6) \quad (1, -4) \quad (1, -5) \quad (1, -6) \quad (-1, -4)$$

3 El triángulo ABC fue trasladado según un vector $\vec{t}$ formando el triángulo A'B'C'. ¿Qué coordenadas tiene el punto B'?



Coordenadas Vértices Inicial	Coordenadas Vértices Traslado
$A = (5, -1.68)$	$A' = (-1.4, 3.52)$
$B = (5, -3.68)$	$B' = (______, ______)$
$C = (2, -3.68)$	$C' = (-4.4, 1.52)$

Respuesta experta

Primera forma

Puede resolverse determinando el vector de traslación por medio de una resta:

$$\begin{aligned}\vec{t} &= A' - A = (-1.4, 3.52) - (5, -1.68) = (-6.4, 5.2) \\ \Rightarrow B' &= B + \vec{t} = (5, -3.68) + (-6.4, 5.2) = (-1.4, 1.52)\end{aligned}$$

Segunda forma

Otra forma de hacerlo sería aprovechando que las posiciones relativas se mantienen. Ya que B tiene la misma abscisa que A y la misma ordenada que C, B' también tendrá esa relación con A' y C', entonces podemos usar la información de la tabla para determinar que

$$B' = (-1.4, 1.52)$$

Tercera forma

Si A se traslada según el vector $(0, -2)$ llega a B. Luego si A' lo trasladamos según el mismo vector el resultado será B' (se mantienen la posiciones relativas).

$$B' = A' + (0, -2) = (-1.4, 3.52) + (0, -2) = (-1.4, 1.52)$$

GESTION ACTIVIDAD 2

Objetivo

Determinar el vector de una traslación en el plano, dados algunos elementos de la transformación.

🌱 Trabajo en grupos

La actividad 2 tiene como objetivo que los estudiantes trabajen de manera más dinámica en resolver problemas ahora con figuras. En este momento el contexto del golf ya no es relevante, pero invítelos a utilizar lo que en esa actividad formalizaron.

Entregue los **ítems 1 y 2** al mismo tiempo e invite a los estudiantes a trabajar de manera individual o en parejas.

🌱 Discusión de curso completo

Una vez que observe que la mayoría de los estudiantes terminaron de responder el **ítem 1** capte la atención del curso e invite a distintos grupos a dar sus opiniones. Para hacer parte al curso general de la discusión puede hacer preguntas censales y dejar registro en la pizarra de las respuestas:

- ¿Quiénes creen que no es posible?
- ¿Quiénes creen que existen infinitas traslaciones posibles?

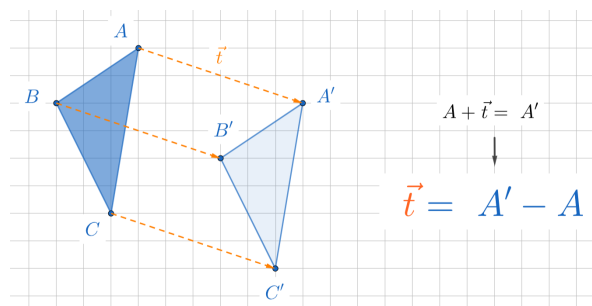
En este momento de discusión grupal es importante incentivar el uso del vocabulario matemático asociado a la traslación, pero no lo haga corrigiendo durante una explicación si no que invite a los mismos estudiantes a ir identificando los sinónimos más adecuados.

Conclusiones

Resuma los puntos clave de las discusiones y conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas:

- Para determinar las coordenadas de un punto al trasladarlo, se pueden sumar las coordenadas del punto con las componentes del vector.

- De manera inversa, para deducir los componentes del vector de traslación, se pueden restar las coordenadas correspondientes entre la imagen de un punto y su preimagen.

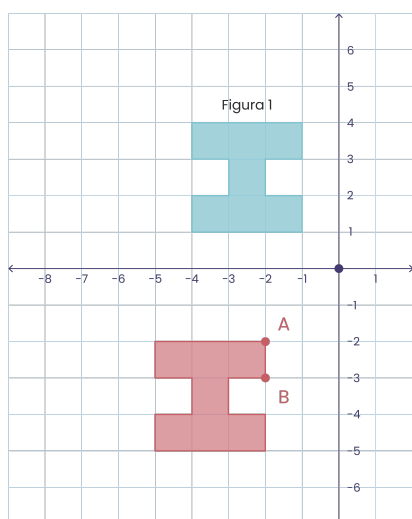


Anticipaciones y sugerencias

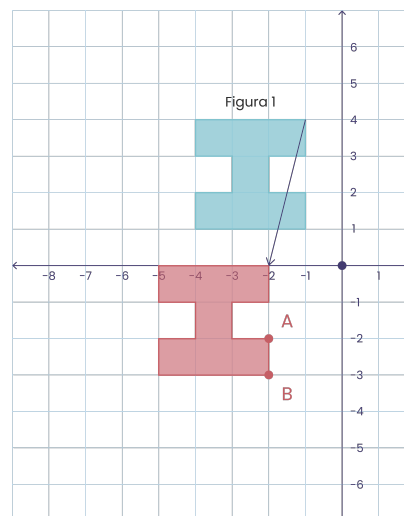
Los ítems planteados en esta actividad tienen como objetivo que los estudiantes tengan más práctica con la técnica de traslación estudiada en la actividad 1.

No se espera que los estudiantes desarrollen de manera completamente independiente la idea de la conclusión, pero sí que al menos puedan identificar la estrategia de manera pictórica.

Un error al que estar atentos se puede dar en el ítem 1, los estudiantes pueden identificar una posible traslación y luego hacer un “ajuste” al vector encontrado aprovechando el trabajo ya hecho, pero de manera incorrecta.



Identifican el vector $(-1, -4)$

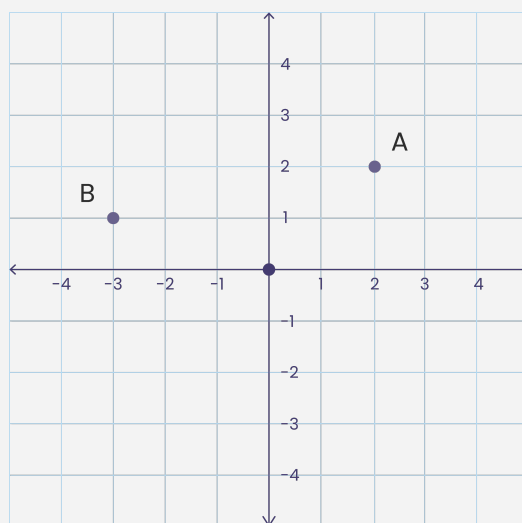


Asumen que esta traslación es solo una unidad más abajo y responden $(-1, -5)$.

TICKET DE SALIDA

El punto A se traslada según el vector $(-2, -3)$ obteniéndose un punto P . Luego, el punto P se traslada según el vector $\vec{t}$ hasta llegar al punto B . ¿Cuáles son los componentes de $\vec{t}$?

$$\vec{t} = (\square, \square)$$



Indicador de
evaluación

Reconoce una de las transformaciones de una composición de traslaciones, dados el movimiento inicial y la traslación total.



Posibles comprensiones

Respuesta	Respuesta correcta	Posibles comprensiones asociadas
$\vec{t} = (-3, 2)$	X	
$\vec{t} = (-5, -1)$		La respuesta se focaliza en la imagen y en parte del texto, en donde se describe una traslación en el plano, y luego se pregunta por un vector. De esta forma, la respuesta identifica correctamente una traslación de A hacia B, ignorando la relación con el punto P.

CIERRE DE LECCIÓN

En esta lección:

- Aprendimos que se pueden determinar algebraicamente las coordenadas de la imagen de un punto al trasladarlo respecto de un vector, sumando las coordenadas y componentes respectivas.
- Al trasladar el punto $P = (5, -4)$ respecto del vector $\vec{t} = (2, 3)$, las coordenadas de su imagen están dadas por $P' = (5 + 2, -4 + 3) = (7, -1)$.
- También aprendimos que este proceso puede utilizarse para determinar el vector de traslación dada una preimagen y su imagen.
- Si el punto $P = (5, -4)$ se trasladó y se obtuvo el punto $P' = (7, -1)$ los componentes del vector están dados por $\vec{v} = P' - P = (7 - 5, -1 - (-4)) = (2, 3)$.

Términos matemáticos que ahora puedo ocupar:

- plano cartesiano
- vector de traslación