MAT CON

MATEMÁTICA CONECTADA

GUÍA DOCENTE

Lección 6 - Unidad De Transformaciones Isométricas

fcfm FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMMEdu Laboratorio de Educación Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación Gobierno de Chile

PLAN DE REACTIVACIÓN EDUCATIVA seamos Comunidad

unesco Cátedra

VISIÓN GLOBAL

Objetivo de la lección

Descubrir estrategias para reflejar puntos respecto a los ejes del plano cartesiano, utilizando sus coordenadas.

Lugar de la lección en la unidad

Esta corresponde a la séptima clase de la unidad de transformaciones isométricas. Busca que los estudiantes descubran relaciones aritméticas entre las coordenadas de las pre-imágenes e imágenes, cuando el eje de reflexión es alguno de los ejes cartesianos. Al finalizar la lección, se espera que los estudiantes formulen una expresión general para determinar las coordenadas de la imagen de un punto reflejado respecto al eje x o y.

Tareas matemáticas

T1. Reflejar puntos y polígonos respecto a los ejes x e y del plano cartesiano.
T2. Aplicar las características que definen a las reflexiones.
T3. Dibujar la reflexión de triángulos y cuadriláteros en el plano cartesiano.
T4. Descubrir regularidades entre las coordenadas de un punto y las de su imagen, obtenida al reflejar el punto respecto del eje x o y.
T5. Utilizar notación algebraica para describir a través de sus coordenadas, la reflexión de puntos en el plano cartesiano.

Panorama leccion

La **Actividad 1** consiste en reflejar un cuadrilátero gráficamente respecto de los ejes x e y. Debido a que ninguno de los vértices están ubicados en la intersección de la cuadrícula, este trabajo promueve la utilización de las coordenadas del plano para lograr mayor precisión (T1 y T2).

En la **Actividad 2**, los estudiantes determinan las coordenadas de las imágenes de los vértices de triángulos y cuadriláteros al ser reflejados respecto de los ejes del plano cartesiano. Se espera que los estudiantes utilicen técnicas geométricas de las clases anteriores; sin embargo, se espera que identifiquen regularidades aritméticas entre las coordenadas de un punto y las de su imagen (T3 y T4).

A partir de esta actividad el docente podrá introducir la idea de que al reflejar un punto, sus coordenadas cambian de signo , dependiendo del eje respecto del cual se está reflejando.

En la **Actividad 3**, los estudiantes tendrán que aplicar las regularidades observadas en la actividad anterior. A partir de este trabajo, se espera que los estudiantes utilicen lenguaje algebraico para representar las coordenadas de un punto P = (x, y) y las de su imagen al reflejarla respecto de los ejes x e y (T5).

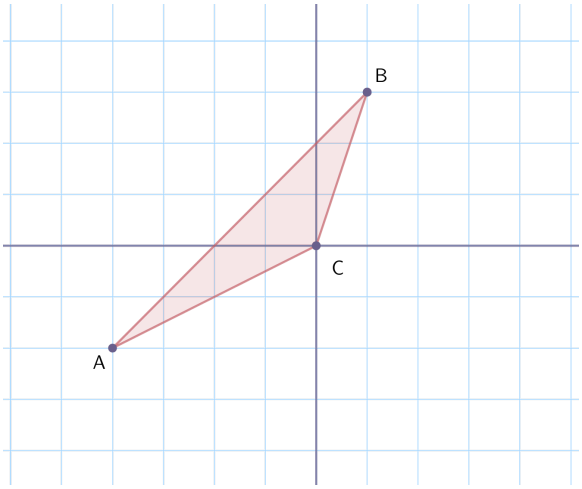
Finalmente, el docente utilizará notación algebraica para formalizar la idea de que las coordenadas cambian de signo, dependiendo del eje respecto del cual se está reflejando un punto en el plano cartesiano.

ACTIVACIÓN

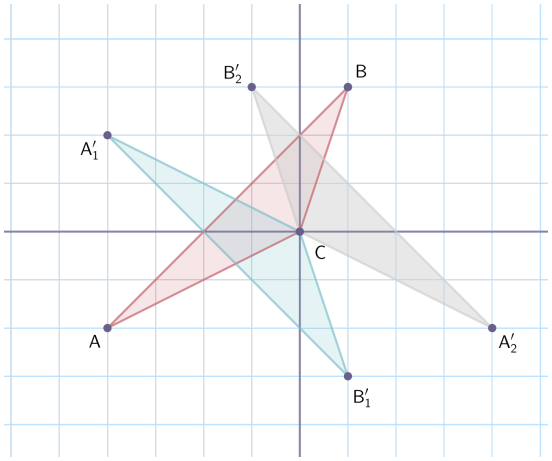
1 Considera el triángulo ABC en el plano cartesiano.

a. Refleja el triángulo ABC respecto del eje x e identifica los vértices correspondientes.

a. Refleja el triángulo ABC respecto del eje y e identifica los vértices correspondientes.



Respuesta experta



GESTION DE LA ACTIVACIÓN

Inicio de la lección

Comience la lección mencionando el objetivo de la clase en un lenguaje informal, por ejemplo:

> *En esta clase vamos a explorar estrategias para reflejar figuras en el plano cartesiano.*

Una vez que los estudiantes tengan sus materiales listos, comience con la **Activación** .

Guiando la activación

Proyecte la activación e indique que reflejarán un triángulo respecto del eje x y luego respecto del eje y, en el plano cartesiano, pero sin especificar coordenadas. Pida a dos o tres estudiantes que marquen en la pizarra las imágenes correspondientes. Mientras tanto, plantee preguntas al resto del curso, con el propósito de recordar los elementos que definen las reflexiones:

- ¿Puedes imaginar la figura final antes de hacer las reflexiones?
- ¿Qué caracteriza a la reflexión?
- ¿Cómo se asocia la equidistancia con la reflexión?
- ¿Es correcto qué C’ coincida con C? ¿Por qué?

Lo que debemos recordar para esta lección

Utilice las respuestas de la activación para conectar con los conceptos geométricos vistos en esta unidad hasta la clase anterior.

- Al reflejar un triángulo, u otra figura, cuyos vértices están en una cuadrícula se puede, con cierta facilidad, determinar sus imágenes.
- La notación que utilizaremos será A para un punto, A’ para la reflexión respecto de un eje y A’’ para la reflexión respecto del otro eje.

ACTIVIDAD 1

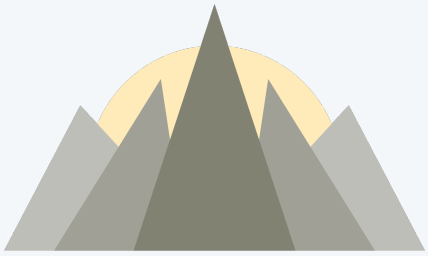
En el diseño gráfico, hay distintos nombres para los símbolos que representan una marca. Por ejemplo:

- Un **isotipo** sólo contiene un dibujo que evoca a la marca. Este símbolo es común en marcas deportivas y de automóviles.



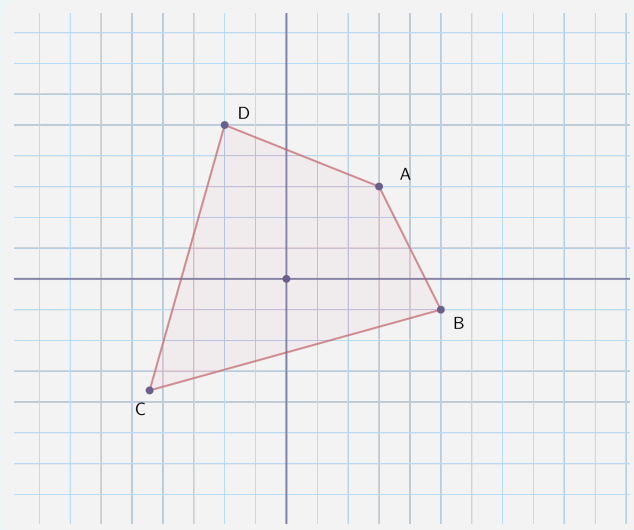
- Un **imagotipo** contiene una combinación de dibujo y texto con el nombre de la marca. Este símbolo es común en equipos de fútbol y bandas musicales.

Supón que trabajas en una consultora de diseño y publicidad. Una nueva marca de ropa deportiva utilizará isotipos para diferenciar sus líneas de productos. En una línea para productos de montaña, decidieron utilizar el siguiente isotipo, basado en la reflexión de un triángulo.



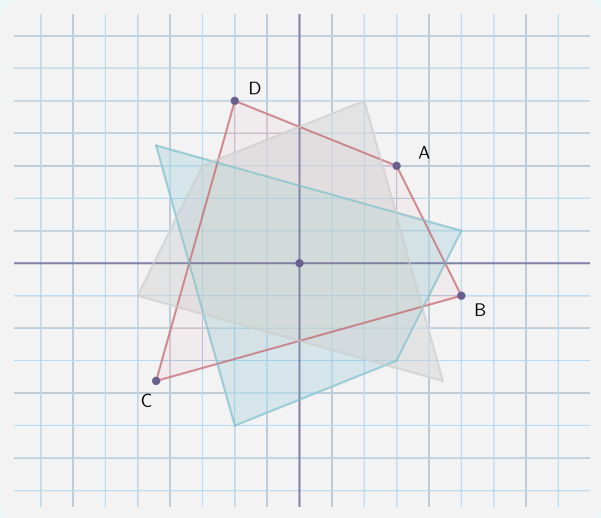
Ahora, para una línea de ropa para deportes acuáticos, te piden desarrollar otro isotipo. Decides usar como base una figura que se forma reflejando un cuadrilátero respecto del eje x, y también respecto del eje y.

Considera el siguiente cuadrilátero ABCD y luego:



1. Refleja ABCD respecto del eje x. Identifica los vértices correspondientes.
2. Refleja ABCD respecto del eje y. Identifica los vértices correspondientes.

Respuesta experta



GESTION ACTIVIDAD 1

Objetivo

Reconocer estrategias que permiten reflejar puntos en el plano cartesiano.

Trabajo individual

Presente la actividad, comentando la gran variedad de simbología geométrica que se puede encontrar en marcas comerciales, y mencione algunas que sus estudiantes conozcan. Entregue el material, pidiendo que no inicien todavía. Cuando todo el curso esté listo, dé inicio a la actividad y, de ser posible, active una cuenta regresiva de entre 3 y 5 min. Comente que al finalizar el tiempo, tendrán que parar de dibujar. Observe el trabajo, identificando estrategias interesantes, dificultades en la construcción de la reflexión y la precisión de las figuras.

Discusión de curso completo

Inicie esta instancia preguntando cuál fue la principal dificultad para lograr lo pedido. Para fomentar la discusión, plantee preguntas como las siguientes:

- ¿Cómo resolvieron el hecho de que los vértices no coincidían con la cuadrícula?
- ¿Es precisa la imagen creada?
- ¿Qué información o instrumentos serían necesarios para hacer las reflexiones con precisión?

Se espera que comenten que no fue posible lograr la reflexión con precisión, ya que la posición de ciertos puntos en el plano no correspondía a un cruce en la cuadrícula. Asegúrese que sus estudiantes hayan tenido en cuenta la propiedad que define a una reflexión: un punto y su imagen equidistan del eje, y el segmento entre ellos es perpendicular al eje.

Conclusiones

Resuma los puntos clave de discusión y conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas:

- Reflejar vértices que no coinciden con la cuadrícula y ubicarlos con precisión es complejo. Sin embargo, una estrategia para lograr la precisión esperada, es utilizar las coordenadas del plano cartesiano.
- Reflejar la figura respecto de un eje transversal a ella, puede dificultar la capacidad de visualizar la imagen final.

Anticipaciones y sugerencias

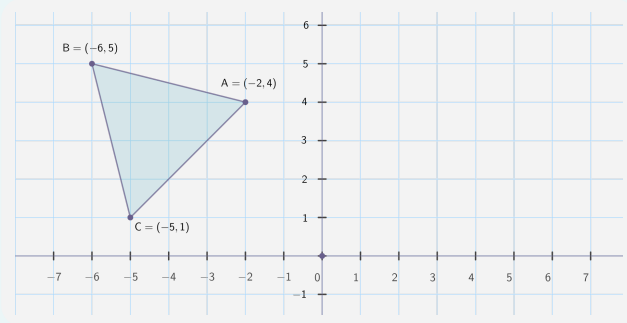
Se espera que utilicen términos geométricos abordados en lecciones anteriores, como equidistancia o propiedades de las transformaciones.

Si hay estudiantes que relativizan la importancia de la precisión en la construcción de la imagen, coménteles que en un contexto profesional, como el de diseño gráfico, esta característica realmente marca la diferencia.

ACTIVIDAD 2

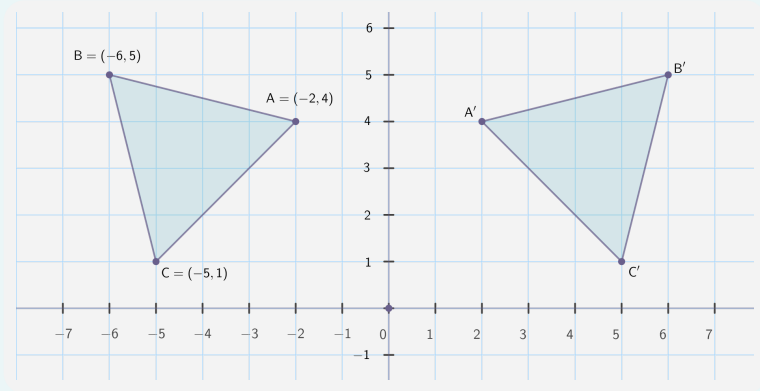
Una diseñadora gráfica quiere explorar la creación de isotipos, a partir de la reflexión de diferentes figuras en el plano cartesiano. Para velar por la precisión, ella tomará registro de las coordenadas de las imágenes de los vértices. Ayúdala a lograr su propósito.

1 Refleja el triángulo ABC respecto del eje y.



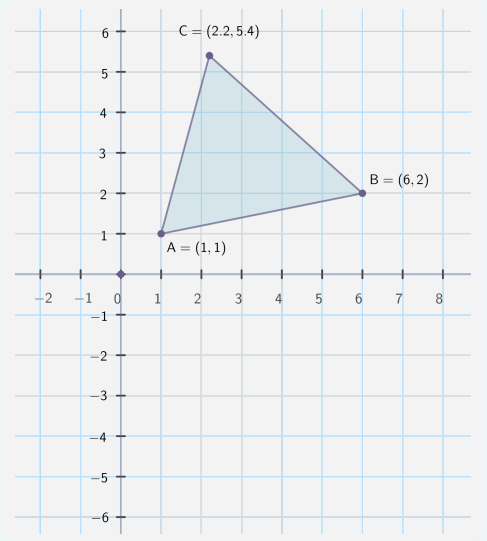
Reflexión respecto del eje y
A′ = (,)
B′ = (,)
C′ = (,)

Respuesta experta



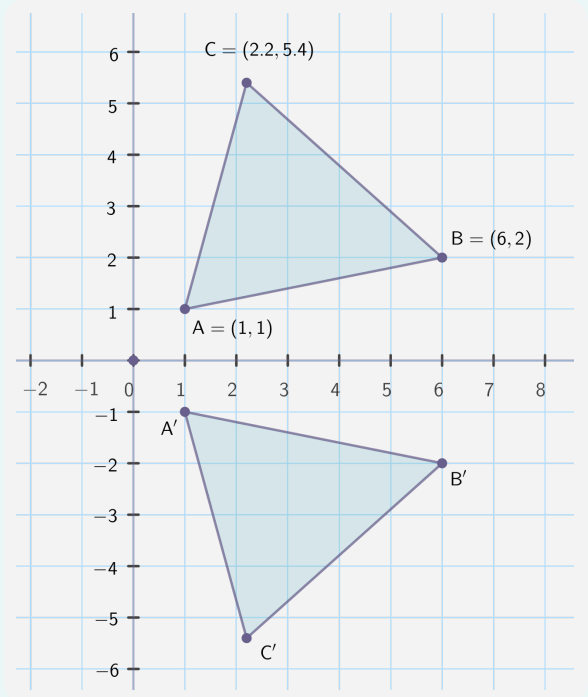
Reflexión respecto del eje y
A′ = (2, 4)
B′ = (6, 5)
C′ = (5, 1)

2 Refleja el triángulo ABC respecto del eje x.



Reflexión respecto del eje x
A′ = (,)
B′ = (,)
C′ = (,)

Respuesta experta



Reflexión respecto del eje x
A′ = (1, –1)
B′ = (6, –2)
C′ = (2.2, –5.4)

3 Refleja el cuadrilátero ABCD respecto de ambos ejes, x e y.

Cuadrilátero ABCD	Reflexión de ABCD respecto del eje x	Reflexión de ABCD respecto del eje y
A = (2.5 , 4)	A′ = (,)	A″ = (,)
B = (5 , - 2.5)	B′ = (,)	B″ = (,)
C = (-4.7 , -4.3)	C′ = (,)	C″ = (,)
D = (-0.6 , 4.8)	D′ = (,)	D″ = (,)

Respuesta experta

Cuadrilátero ABCD	Reflexión de ABCD respecto del eje *x*	Reflexión de ABCD respecto del eje *y*
A = (2.5 , 4)	A′ = (2.5, −4)	A″ = (−2.5, 4)
B = (5 , - 2.5)	B′ = (5, 2.5)	B″ = (−5, −2.5)
C = (−4.7, −4.3)	C′ = (−4.7, −4.3)	C″ = (4.7, −4.3)
D = (−0.6, 4.8)	D′ = (−0.6, −4.8)	D″ = (0.6, 4.8)

GESTION ACTIVIDAD 2

Objetivo

Descubrir una regularidad en las coordenadas de un punto al ser reflejado respecto de los ejes del plano cartesiano.

Trabajo individual

Entregue el material y solicite al curso que resuelva la actividad. Se espera que haya estudiantes que resuelvan la actividad basándose principalmente en lo gráfico del plano cartesiano, y a partir de ahí, reconocer las coordenadas. Por otro lado, puede haber estudiantes a quienes solo les importan las coordenadas. En ambos casos, promueva que cada estudiante comprenda con claridad su propio proceso. Si bien, en esta actividad se pone de manifiesto una regularidad numérica que relaciona las coordenadas de las preimágenes con las de sus imágenes. Esta se hará explícita en la discusión de curso completo.

Discusión de curso completo

Inicie la discusión haciendo notar que a algunos estudiantes les resultó más natural trabajar con lo visual, en este caso, dibujando la imagen del triángulo; y que, a otros, les resultó más natural ir directamente a las coordenadas, a lo numérico. Comente lo valioso de considerar ambos estilos, y que a partir de estas diferencias, construirán ideas matemáticas en conjunto.

Asegúrese de que sus estudiantes establezcan conexiones entre lo gráfico y las coordenadas, planteando preguntas como:

- ¿Cómo podrías explicar la “simetría” que se puede visualizar entre un punto (o segmento) y su imagen al ser reflejada respecto del eje y?
- ¿Cuál es la distancia de un punto (2.5, 4) al eje y? ¿Cuál es la distancia de un punto (−2.5, 4) al eje y? Relacione esta idea con la medida del segmento de extremos (0, 4) y (2.5, 4).

Haga notar la relación entre los puntos A y A’’, y entre B y B’. Ambos casos permiten mostrar con claridad el cambio de signo en las coordenadas, lo que se explica geométricamente a través de la equidistancia al eje, característica propia de la reflexión. Promueva que sus estudiantes comprendan que dicha regularidad numérica surge a partir de la noción geométrica de equidistancia al eje.

Es muy importante que no formalice los descubrimientos expresándolos en coordenadas de manera general, ya que este trabajo se realizará en la siguiente actividad.

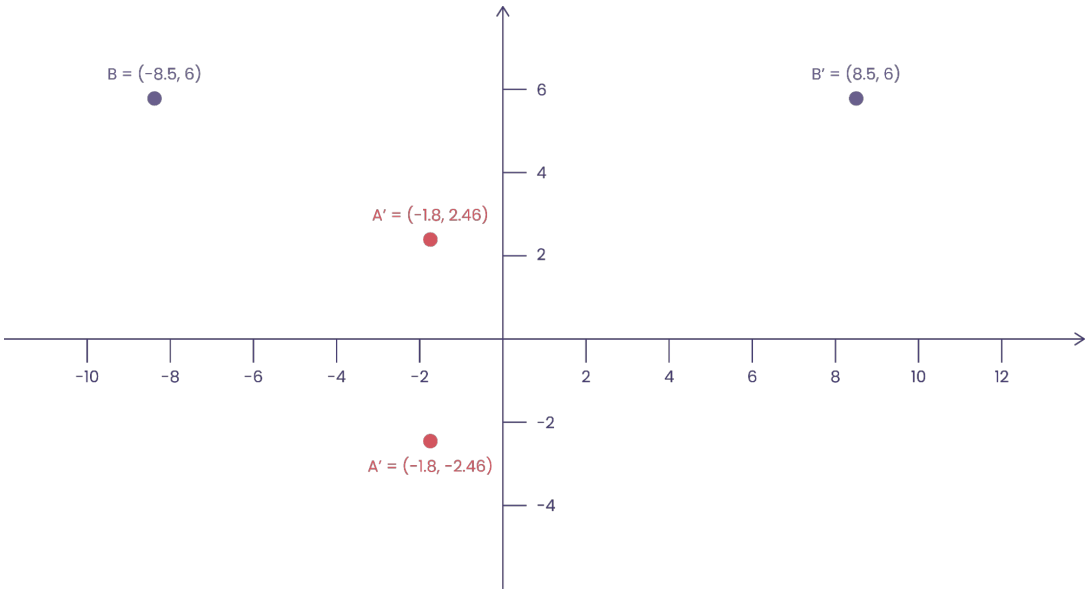
Conclusiones

Resuma los puntos clave de discusión y conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas:

- Para reflejar puntos en el plano cartesiano respecto a sus ejes, se puede utilizar el gráfico o bien las coordenadas de los puntos.
- Si centramos la atención en las coordenadas de la preimagen y la imagen, se puede notar una regularidad numérica, que describimos como:
  - Al reflejar un punto respecto del eje x, la coordenada y del punto cambia de signo.

    Por ejemplo, al reflejar $A = (-1.8, -2.46)$ respecto del eje x, se obtiene $A' = (-1.8, 2.46)$.
  - Al reflejar un punto respecto del eje y, la coordenada x del punto cambia de signo.

    Por ejemplo, al reflejar $B = (-8.5, 6)$ respecto del eje y, se obtiene $B' = (8.5, 6)$.



- El uso de las coordenadas del plano cartesiano promueve el descubrimiento de regularidades numéricas, en este caso, permitió reconocer la imagen al reflejar figuras y puntos.

Anticipaciones y sugerencias

Algunos estudiantes pueden asegurar que "x" es positiva y que " $-x$ " es negativa. En casos como este, describa la regularidad descubierta como un "cambio de signo". De ser necesario, comente que x puede representar cualquier número entero, positivo o negativo, y que −x lo interpretarán, en este contexto como un cambio de signo de x. Por ejemplo, $-2 \rightarrow -(-2) = 2$.

De ser necesario, proyecte las respuestas y pida a sus estudiantes que digan claramente qué coordenadas se están comparando. Muestre los segmentos gráficamente y relacione su medida con las coordenadas. Haga notar cuáles se mantienen numéricamente constantes y cómo esto se asocia geométricamente a la reflexión.

ACTIVIDAD 3

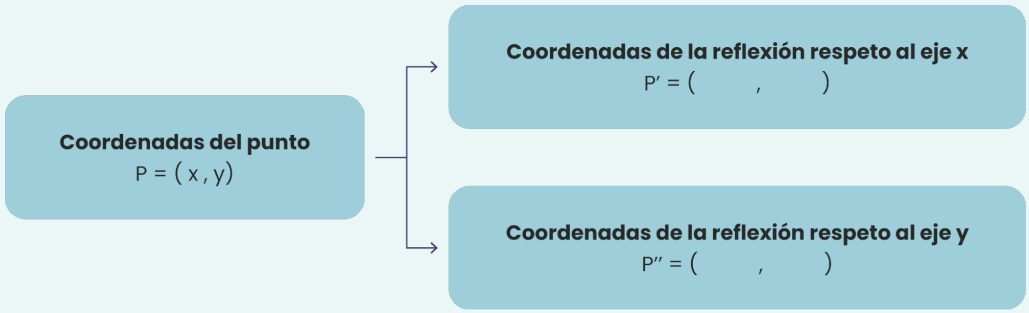
1 Completa con las coordenadas de la imagen al reflejar los puntos respecto del eje indicado.

Puntos	Reflexión respecto del eje x
$P = (7.56,, -8.12)$	P′ = (,)
$Q = \left(-\frac{4}{3}, \frac{3}{7}\right)$	Q′ = (,)
R = (, $\sqrt{2}$)	R′ = (4 ,)
S = (2π ,)	S′ = (, $-\pi$)
Puntos	**Reflexión respecto del eje y**
$M = (-2, -1.54)$	M′ = (,)
$N = (\ 5a, 2.5)$	N′ = (,)
$T = \left(\frac{7}{2},\right)$	$T' = \left(, -\frac{1}{3}\right)$
U = (,)	$U' = (100, d)$

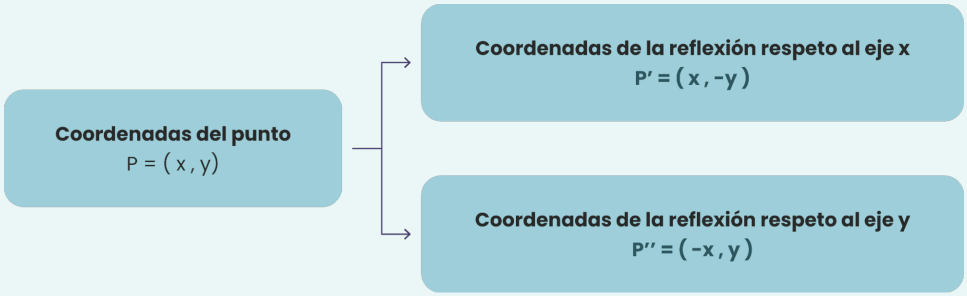
Respuesta experta

Puntos	Reflexión respecto del eje x
$P = (7.56,, -8.12)$	$P' = (7.56, 8.12)$
$Q = \left(-\frac{4}{3}, \frac{3}{7}\right)$	$Q' = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{3}{7}\right)$
$R = \left(4, -\sqrt{2}\right)$	$R' = \left(4, \sqrt{2}\right)$
$S = (2\pi, \pi)$	$S' = (2\pi, -\pi)$
Puntos	**Reflexión respecto del eje y**
$M = (-2, -1.54)$	$M' = (2, -1.54)$
$N = (5a, 2.5)$	$N' = (-5a, 2.5)$
$T = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{3}\right)$	$T' = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{3}\right)$
$U = (-100, d)$	$U' = (100, d)$

2 A partir de lo estudiado, completa el siguiente diagrama.



Respuesta experta



GESTION ACTIVIDAD 3

Objetivo

Utilizar coordenadas del plano cartesiano para expresar la reflexión de puntos respecto de los ejes x e y.

Trabajo individual

Entregue la hoja de trabajo y pídales que la completen individualmente. Monitoree el trabajo, identificando aquellos estudiantes que resuelven con facilidad el **ítem 1** y no así el **ítem 2**. Puede que no todos finalicen el **ítem 2**, sin embargo, habrán abordado y trabajado el ítem anterior y con esto, podrán involucrarse en la discusión de curso completo.

Discusión de curso completo

Inicie este momento, solicitando a distintos estudiantes que registren sus respuestas en un lugar visible de la pizarra. Promueva que sus estudiantes justifiquen sus respuestas, planteando preguntas que los motiven a concentrar la atención en algunos aspectos, como las siguientes:

- Si el punto es $P = (7.56, -8.12)$ y su imagen al reflejar con respecto al eje x es $P' = (7.56, 8.12)$, ¿qué cambio numérico observas?
- Si dibujamos un eje x en la pizarra y marcamos P bajo él y, luego, marcamos P' sobre este eje, ¿se movió el punto de izquierda a derecha? ¿Se movió de arriba hacia abajo? ¿Cuánto?
- ¿En qué cuadrante está el punto M? ¿En qué cuadrante quedaría M'? M' respecto de M, estaría a su derecha o izquierda? ¿A qué distancia está M' de M?

Para incentivar que todos comprendan las expresiones $P = (x, y)$ de la misma manera puede preguntar:

- El punto $(-5, 10)$, ¿está a la izquierda o derecha del eje y ? ¿Dónde queda su imagen al reflejarla respecto del eje y? Haga notar que la "altura" del punto no cambia, es decir, 10 se mantiene.
- El punto $(-5, 10)$, ¿está sobre o bajo el eje x ? ¿Dónde queda su imagen al reflejarla respecto del eje x ? Haga notar que el punto no se mueve ni a la izquierda ni a la derecha, es decir, −5 se mantiene.
- Cuando un punto (a, b) está a la izquierda del eje y , ¿el valor de a es positivo o negativo?
- Cuando un punto (a, b) está bajo el eje x, ¿el valor de b es positivo o negativo?
- Cuando un punto se refleja respecto del eje y , ¿mantiene su altura? Si el punto es (a, b), ¿cuál sería la manera de expresar en coordenadas que esta "altura" no cambia?

Sea claro al indicar que aprenderse las fórmulas de memoria **no** es un objetivo, y que la importancia radica en comprender el sentido y visualizar las reflexiones.

Conclusiones

Resuma los puntos clave de discusión y conecte las respuestas de los estudiantes con las siguientes ideas:

- El uso de lenguaje algebraico, como $P = (x, y)$ nos permite sintetizar mucha información geométrica de manera muy concisa. Por lo que, durante este curso y la enseñanza media se utilizará cada vez con mayor frecuencia.

Anticipaciones y sugerencias

Es posible que en la actividad surja la noción de que el signo "$-$" se asocia únicamente con un número negativo. Sea explícito al indicar que el rol de este signo, en este contexto, corresponde a un **cambio de signo**. También, si es necesario, puede recordar que el símbolo " − " delante de un número representa su "inverso aditivo". Por ejemplo, el inverso aditivo del número (−2) es − (− 2), que se simplifica como 2, es decir, − (− 2) = 2. Si representamos un número con una variable x, entonces, la expresión $-x$ es su inverso aditivo, que puede ser positivo o negativo, dependiendo del signo de x.

TICKET DE SALIDA

Los vértices de un triángulo son $A = (-5, 1)$, $B = (1, 6)$ y $C = (3, -2)$. **¿Cuáles son las coordenadas de los vértices al reflejar el triángulo respecto del eje x?**

b. $A = (5, 1)$, $B = (-1, 6)$ y $C = (-3, -2)$

c. $A = (-5, -1)$, $B = (1, -6)$ y $C = (3, 2)$

d. $A = (5, -1)$, $B = (-1, -6)$ y $C = (-3, 2)$

Indicador de evaluación	Aplica reflexiones sobre figuras en el plano cartesiano respecto de los ejes del sistema, utilizando técnicas analíticas.

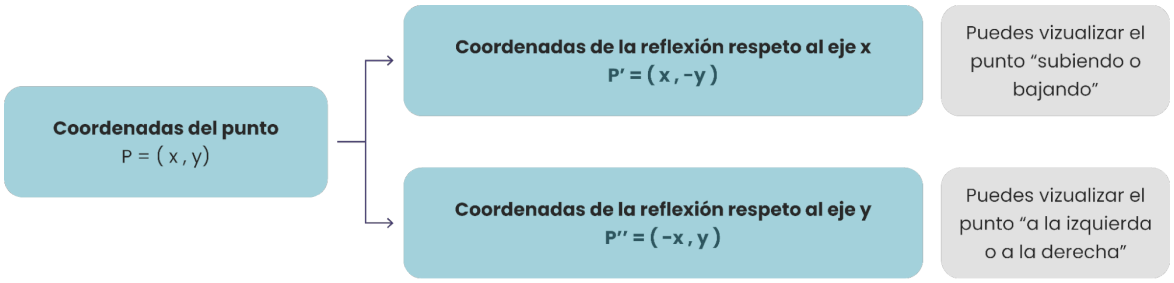
Posibles comprensiones

Alternativa	Respuesta correcta	Posibles comprensiones asociadas al error
a		Asocia la reflexión respecto del eje x con la modificación de la coordenada x. Comprende que la reflexión respecto del eje x modifica una de las coordenadas de cada punto de la preimagen, por medio de la aplicación del inverso aditivo, pero no identifica correctamente qué coordenada cambia.
b	X	
c		Comprende que la reflexión respecto del eje x modifica las coordenadas de cada punto de la preimagen, por medio de la aplicación del inverso aditivo. Asocia la reflexión respecto de un eje con la modificación de todas las coordenadas de la preimagen.

CIERRE DE LECCIÓN

En esta lección:

- Descubrimos que se pueden determinar las coordenadas de la imagen de un punto al reflejarlo respecto de los ejes del plano cartesiano, sólo conociendo las coordenadas del punto inicial.



- Por ejemplo, si el punto es $P = (-3, 8)$, su imagen al reflejarlo respecto del eje x es $P' = (-3, -8)$, y al reflejarlo con respecto del eje y es $P'' = (-(-3), 8) = (3, 8)$.
- Recuerda que cuando x se transforma en $-x$, diremos que cambió de signo. En otras palabras:
  - si x es negativo, entonces, $-x$ es positivo, y.
  - si x es positivo, entonces, $-x$ es negativo.
- Por ejemplo, si $x = -3$, entonces $-x = -(-3) = 3$. De manera similar ocurre con la otra coordenada. Si $y = -\frac{2}{5}$, entonces, $-y = -\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}$

Términos matemáticos que ahora puedo ocupar:

- Coordenadas de la reflexión
- Coordenadas de la reflexión respecto al eje x
- Coordenadas de la reflexión respecto al eje y