MAT CON

MATEMÁTICA CONECTADA

GUÍA DOCENTE

Lección 8 - Unidad Transformaciones Isométricas

fcfm FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMMEdu Laboratorio de Educación Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación Gobierno de Chile

PLAN DE REACTIVACIÓN EDUCATIVA Seamos Comunidad

unesco Cátedra

VISIÓN GLOBAL

Objetivo de la lección

Descomponer una composición de transformaciones en una o más transformaciones simples en el contexto de un problema de teselado.

Lugar de la lección en la unidad

En esta primera lección sobre los conceptos básicos de probabilidad, los estudiantes exploran por primera vez la noción de aleatoriedad. El objetivo es que identifiquen las características que definen una situación como aleatoria. Este conocimiento es fundamental para las lecciones posteriores, donde aprenderán a estimar y calcular probabilidades en situaciones aleatorias.

Tareas matemáticas

T1. Reconocer el efecto visual que tienen las rotaciones y reflexiones sobre la ubicación relativa de los elementos contenidos en una figura.
T2. Descomponer una transformación dada en una serie de rotaciones y reflexiones.
T3. Identificar transformaciones compuestas equivalentes.
T4. Descomponer una transformación dada en una serie de rotaciones, reflexiones y traslaciones.
T5. Determinar transformaciones inversas en el contexto de un problema de teselado.

Panorama leccion

Esta lección consta de 3 actividades. En la **Actividad 1** los estudiantes deben reconocer cómo la rotación y la reflexión afectan la posición relativa de los elementos de la figura (T1). A partir de este trabajo podrán desarrollar una estrategia para descomponer una transformación (T2) al mismo tiempo que identifican transformaciones que logran resultados equivalentes (T3).

En la **Actividad 2** los estudiantes aplican la estrategia desarrollada previamente, pero ahora en el contexto de un teselado por lo que deben descomponer múltiples transformaciones además de considerar también la posición final de la figura (T4 y T5). Esta actividad permite al docente relevar la importancia de visualizar múltiples posibles transformaciones para escoger las más eficientes.

La **Actividad 3** permite a los estudiantes profundizar en las ideas desarrolladas en la Actividad 2 además de permitirle al docente el concepto de transformación inversa para utilizar en el contexto de la resolución de un problema de teselado (T5).

A partir de esta lección los estudiantes tendrán la oportunidad de desarrollar aún más la habilidad de “visualizar” además de reconocer transformaciones equivalentes.

ACTIVIDAD 1

Considera que a la siguiente figura original se le pueden aplicar las transformaciones isométricas descritas a continuación:

- Rotación en 90° en torno al origen.
- Rotación en 180° en torno al origen.
- Rotación en 270° en torno al origen.
- Reflexión respecto al eje x (línea horizontal).
- Reflexión respecto al eje y (línea vertical).

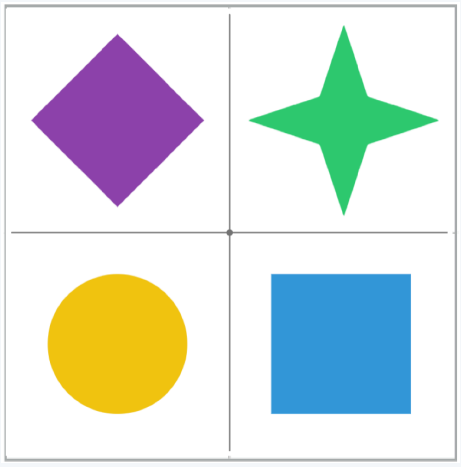
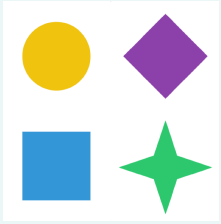
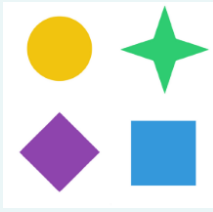
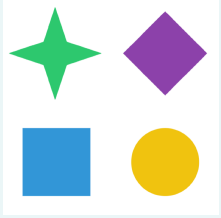


Figura original

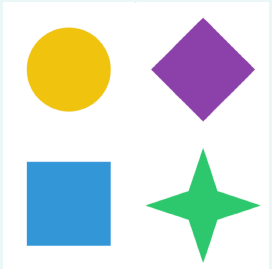
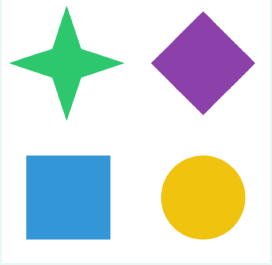
1 Determina cuál(es) de las siguientes figuras se puede lograr aplicando una composición de rotaciones y reflexiones a la figura original. Completa con "Sí" o "No" según corresponda.

			
__ se puede	__ se puede	__ se puede	__ se puede

2 ¿En qué elementos de la imagen podemos fijarnos para reconocer si podemos lograr llegar a la figura por medio de una composición de rotaciones y reflexiones? Utiliza ejemplos para explicar tu razonamiento.

Respuesta experta

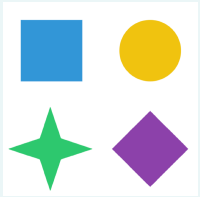
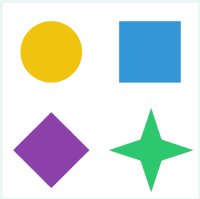
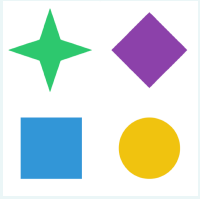
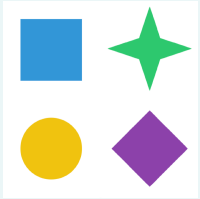
1 Determina cuál(es) de las siguientes figuras se puede lograr aplicando una composición de rotaciones y reflexiones a la figura original. Completa con "Sí" o "No" según corresponda.

			
Sí se puede	**No** se puede	**Sí** se puede	**No** se puede

2 ¿En qué elementos de la imagen podemos fijarnos para reconocer si podemos lograr llegar a la figura por medio de una composición de rotaciones y reflexiones? Utiliza ejemplos para explicar tu razonamiento.

En las posiciones relativas de las figuras. Por ejemplo, la estrella y el rombo están siempre diagonales el uno al otro. No podemos cambiar esa relación solo con las transformaciones que hemos visto.

3 Escribe dos secuencias de transformaciones isométricas que permitan obtener la imagen transformada a partir de la figura original.

Imagen Transformada	Transformaciones para obtener la imagen	
	Secuencia #1	Secuencia #2
	*(Ejemplo)* 1. Reflexión respecto a Y. 2. Reflexión respecto a X.	
		
		
		

Respuesta experta

3

Transformaciones para obtener la imagen	
Secuencia #1	Secuencia #2
1. Reflexión respecto a Y. 2. Reflexión respecto a X.	1. Rotación en 180°
1. Reflexión respecto a X.	1. Reflexión respecto a Y. 2. Rotación en 180°.
1. Reflexión respecto a Y.	1. Reflexión respecto a X. 2. Rotación en 180°.
1. Reflexión respecto a X. 2. Rotación en 90°.	1. Reflexión respecto a Y. 2. Rotación en 270°.

GESTION ACTIVIDAD 1

Objetivo

Identificar transformaciones compuestas equivalentes por medio del reconocimiento del efecto que una rotación o reflexión tiene sobre la ubicación relativa de los elementos de una figura.

Discusión de curso completo

Para la primera parte de la actividad entregue la figura inicial recortada de modo que los estudiantes puedan manipularla al responder los **ítems 1, 2 y 3** . Antes de comenzar asegúrese de que todos pueden llevar a cabo las 3 transformaciones simples a la figura inicial utilizando el material entregado.

Trabajo en grupos

Durante el monitoreo asegúrese de que los estudiantes no estén solamente dependiendo del material concreto (por ejemplo, buscando exhaustivamente alguna forma de obtener la figura), si no que también estén pudiendo extrapolar estrategias. Para esto puede hacer preguntas como:

- ¿Cómo podemos estar seguros de que nunca lograremos obtener alguna de esas figuras? Hay muchas posibles formas de combinar las transformaciones.
- ¿Podrías dibujar una nueva figura que no pueda lograrse por medio de transformaciones de la figura original?

Discusión de curso completo

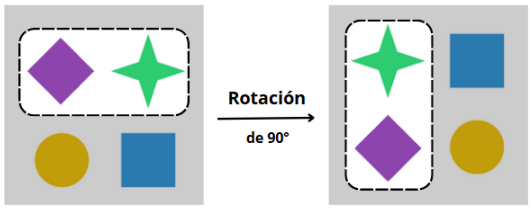
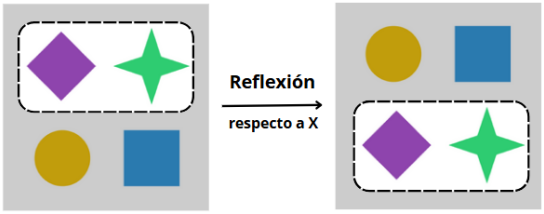
Al revisar el **ítem 1 y 2** invite a distintos estudiantes a compartir sus razonamientos. Guíe la discusión para que los estudiantes expresen sus ideas utilizando el vocabulario de transformaciones visto en el curso.

Durante la revisión del **ítem 3** , proyecte el recurso de Scratch para poder ir verificando alguna de las respuestas de los estudiantes. Invite a los estudiantes a explicar sus estrategias y a partir de ellas elaboren en conjunto una lista de “consejos” para identificar las transformaciones simples necesarias.

Conclusiones

Al cerrar esta actividad se debe llegar a las siguientes conclusiones:

- Existen combinaciones de transformaciones que tienen el mismo efecto sobre la figura inicial (cualquiera sea), a estas se les puede llamar **transformaciones equivalentes** . Por ejemplo: una reflexión con respecto a X y luego respecto a Y tiene el mismo resultado que una rotación en 180° en torno al origen.
- La rotación y reflexión producen cambios distintivos en la figura que son de ayuda al identificar las transformaciones que pueden estar involucradas.

	
La rotación en 90° puede verse como un intercambio entre filas y columnas.	Las reflexiones con respecto a X (e Y) pueden visualizarse como un cambio en el orden de las filas (o columnas).

Anticipaciones y sugerencias

Es posible que los estudiantes tengan dificultades para sistematizar la búsqueda de las transformaciones en el ítem 3. Para ayudarles puede:

- Sugerir un método de exploración más sistemático (“comencemos con una reflexión, ok. Ahora desde aquí, ¿qué me acerca más a mi objetivo?, ¿otra reflexión o una rotación?”)
- Sugerir una estrategia de visualización (“Observemos solamente el cuadrado morado y la estrella verde. De esa manera será más fácil ver cómo transformar la figura para llegar a nuestro objetivo.”)

ACTIVIDAD 2

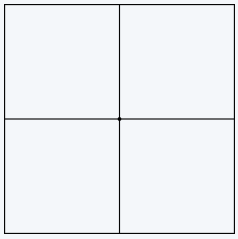
En la siguiente actividad usaremos la tesela de la imagen para teselar el plano utilizando solamente una combinación de:

- Rotaciones de 90°, 180° y 270° en torno al origen.
- Reflexiones con respecto al eje X e Y.
- Traslaciones de una unidad.

Luego de cada paso puede marcar la figura si está en la posición deseada.

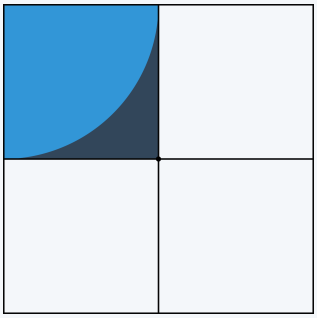


Tesela

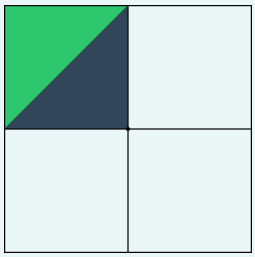
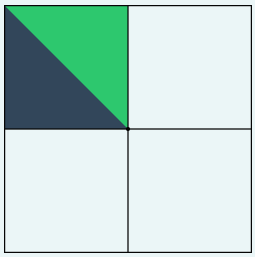
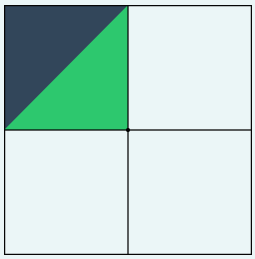
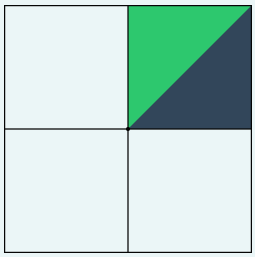


Plano a teselar

Ejemplo

Figura objetivo	Posición Inicial	Pasos a seguir
		1. Reflejar respecto al eje x y marcar. 2. Reflejar respecto al eje y y marcar. 3. Reflejar respecto al eje x y marcar

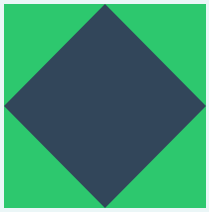
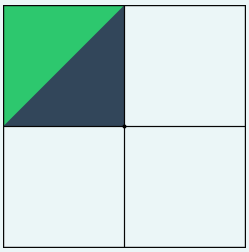
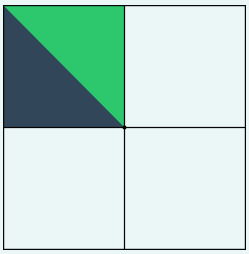
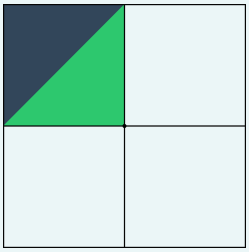
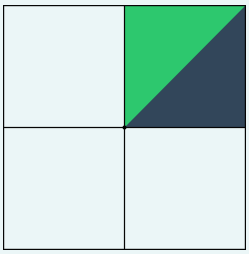
1 Considerando la posición inicial de la tesela escriba las transformaciones que permitan formar la figura objetivo. En el momento que quiera que una figura quede marcada puede indicarlo con "marca".

Figura objetivo	Posición Inicial	Pasos a seguir
		
		
		
		

MAT CON
MATEMÁTICA CONECTADA

Respuesta experta

1 Todas tienen múltiples formas de ser resueltas. Se detallan algunas.

Figura objetivo	Posición Inicial	Pasos a seguir
		Puede ser rotando 3 veces 90° o reflejando respecto a x, luego respecto a y y una vez más respecto a x.
		Reflejar con respecto a x, luego reflejar con respecto a y y finalmente con respecto a x.
		Rotar 90°, reflejar con respecto a y una unidad arriba. Luego, trasladar una unidad abajo y reflejar con respecto a x. Luego, Trasladar una unidad abajo y una a la izquierda Finalmente, Rotar 180°
		Refleja respecto a x. Luego refleja respecto a y y trasladar una unidad arriba. Finalmente refleja respecto x.

2 ¿Qué estrategia utilizaron para determinar las transformaciones? ¿Qué fue lo más difícil?

Respuesta experta

2 En línea con lo detallado en el ítem anterior, en esta pregunta se espera que aparezcan respuestas variadas.

GESTION ACTIVIDAD 2

Objetivo

Descomponer una transformación dada en una serie de rotaciones, reflexiones y traslaciones.

Discusión de curso completo

Presente la actividad e indique que, de manera similar a la actividad inicial, en esta actividad aplicaremos transformaciones a una figura cuadrada en un plano, de esa manera al rotar o reflejar, la figura cambia de posición.

Desarrollen el primer teselado del **ítem 1** en conjunto utilizando el recurso de Scratch o material concreto para asegurarse de que todos los estudiantes entienden la actividad. Recalque que no es necesario marcar la figura en cada paso.

Trabajo en grupos

Durante el monitoreo invite a los estudiantes a encontrar la manera de lograr el patrón en la menor cantidad de pasos. Para motivar que los estudiantes desarrollen estrategias de manera consciente puede plantear la siguiente pregunta:

- ¿En qué orden generan el patrón? ¿Siempre es conveniente partir en el mismo orden?
- ¿A qué teselas les puedo aplicar una única transformación y lograr esta (apunta una tesela)?

Discusión de curso completo

Revisen las respuestas al **ítem 1** invitando a distintos estudiantes a participar. Asegúrese de que para cada figura objetivo surja más de una manera de lograrlo.

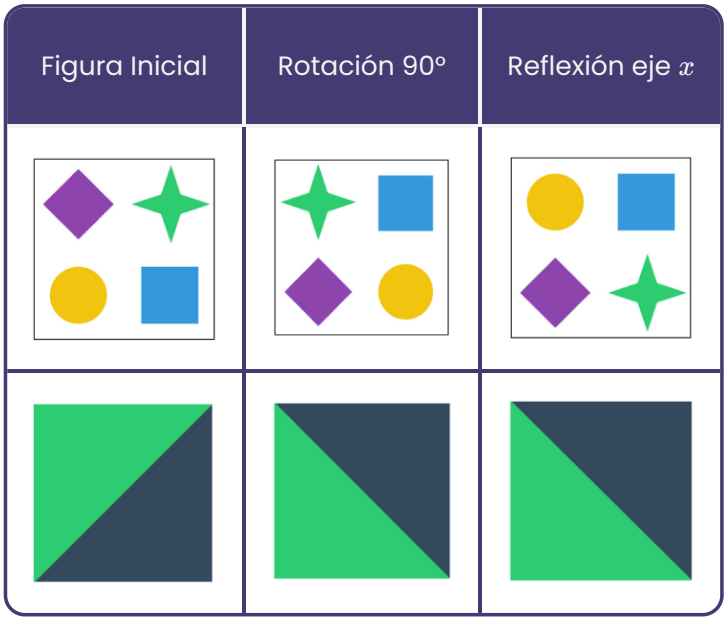
Invite a los estudiantes a compartir sus respuestas al **ítem 2** . Guíe la discusión para concluir que:

- Podemos reflejar/rotar y luego ubicar la tesela en el lugar correcto por medio de traslaciones, pero es más eficiente escoger rotaciones/reflexiones que naturalmente ubiquen la tesela en el lugar deseado.
- La simetría de la figura reduce la cantidad de figuras posibles, en este caso a solo 4, lo que aumenta la cantidad de formas de obtener un mismo resultado (a pesar de no ser transformaciones equivalentes).

Conclusiones

Al finalizar esta actividad concluya vinculando las estrategias de los estudiantes con la siguientes ideas de transformaciones isométricas:

- Combinando reflexiones respecto a X e Y y rotaciones de 90° es posible lograr hasta 8 teselas distintivas.
- Si la figura tiene alguna simetría, algunas transformaciones producirán el mismo resultado, a pesar de no ser **transformaciones equivalentes** . Para que dos transformaciones sean equivalentes deben producir la misma imagen cualquiera sea la preimagen.



Una reflexión con respecto al eje x **no es equivalente** a una rotación de 90° porque no siempre producen la misma imagen.

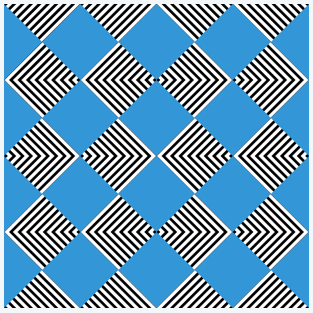
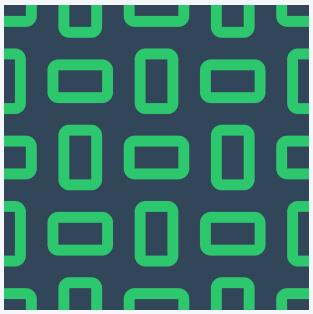
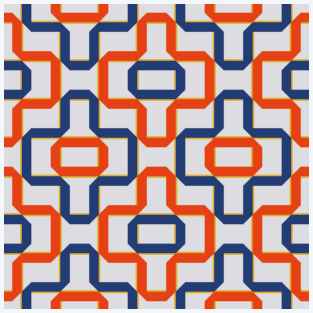
Anticipaciones y sugerencias

Si es que algún grupo está teniendo problemas para visualizar las transformaciones puede sugerirles tapar una parte de la figura objetivo para enfocarse en un fragmento del patrón por vez. Intente evitar el uso de material concreto ya que buscamos desarrollar la capacidad de visualización.

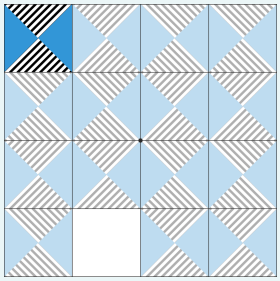
Puede guiar a los estudiantes a utilizar la tabla del **ítem 2** de la **actividad 1** como referencia de las transformaciones equivalentes.

ACTIVIDAD 3

Completando Patrones

Nombre	Tesela base	Patrón
Zebra azul		
Ceros Binarios		
Flores Bicolor		

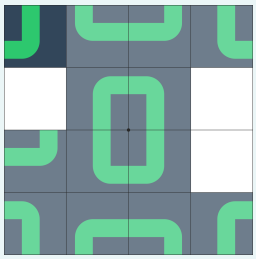
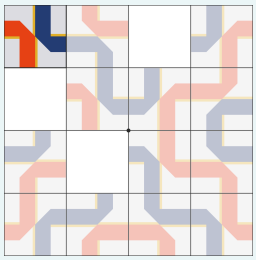
1 Uno de sus compañeros anotó los siguientes pasos para completar el patrón zebra azul.

Plano	Transformaciones para completar el patrón
	1. Reflejar con respecto al eje y. 2. Trasladar una unidad a la izquierda. 3. Rotar en 180° y marcar.

a. Verifique que al seguir los pasos se completa efectivamente el patrón.

b. Encuentra una forma de lograr el mismo resultado utilizando solamente dos transformaciones.

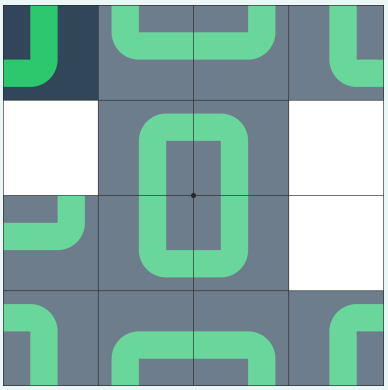
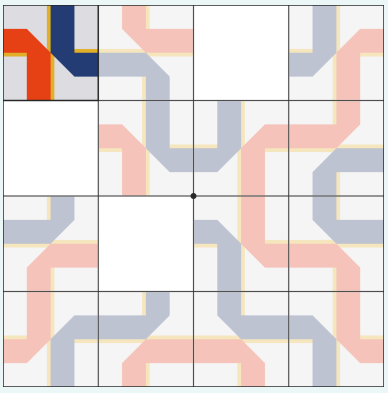
2 Escriban las transformaciones que deben llevarse a cabo en el plano mostrado para completar la sección faltante del patrón considerando como posición inicial la esquina superior izquierda.

Plano	Transformaciones para completar el patrón
	
	

Respuesta experta

1 **(respuesta ítem b.)** Trasladar una unidad a la derecha y reflejar con respecto al eje x.

2 Escriban las transformaciones que deben llevarse a cabo en el plano mostrado para completar la sección faltante del patrón considerando como posición inicial la esquina superior izquierda.

Plano	Transformaciones para completar el patrón
	Una posible respuesta es: 1. Trasladar dos unidades a la derecha y dos unidades abajo. 2. Reflejar con respecto al eje x y luego al eje y.
	Una posible respuesta es: 1. Trasladar una unidad a la derecha y reflejar con respecto al eje x. 2. Luego, rotamos 90°, reflejamos respecto al eje x y trasladamos una unidad hacia arriba.

GESTION ACTIVIDAD 3

Objetivo

Completar un teselado por medio de transformaciones utilizando la estrategia de la transformación inversa.

Trabajo en grupos

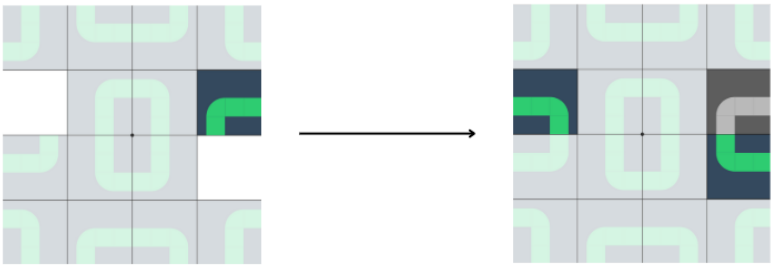
Entregue las hojas correspondientes a la actividad 3 a los estudiantes y dispongalos en parejas. Proyecte el recurso de Scratch correspondientey asegúrese de que todos entiendan las instrucciones.

Durante el monitoreo invite a los estudiantes a poner en juego las estrategias de la actividad anterior.

Discusión de curso completo

Al finalizar la actividad revisen en conjunto las respuestas a los **ítems 1 y 2** . Guíe una puesta en común donde los grupos compartan sus estrategias. En este momento se espera que los estudiantes puedan reforzar las ideas y estrategias previas, pero también se espera que surja la siguiente estrategia:

Uno puede comenzar desde el final, identificando transformaciones que llevan a la figura deseada, de esa manera no es necesario probar tantas combinaciones.



¿Cuáles son preimágenes de la tesela marcada bajo una reflexión?

Conclusiones

Una **transformación inversa** es aquella que "deshace" los cambios de una transformación hasta volver a la figura original. A continuación se ejemplifican algunas de ellas:

Transformaciones	Rotación en 90°	Reflexión con respecto al eje x	Reflexión con respecto al eje y	Traslación
Inversas	Rotación en 270°	Reflexión con respecto al eje X	Reflexión con respecto al eje Y	Traslación (misma dirección y magnitud, pero en sentido opuesto)

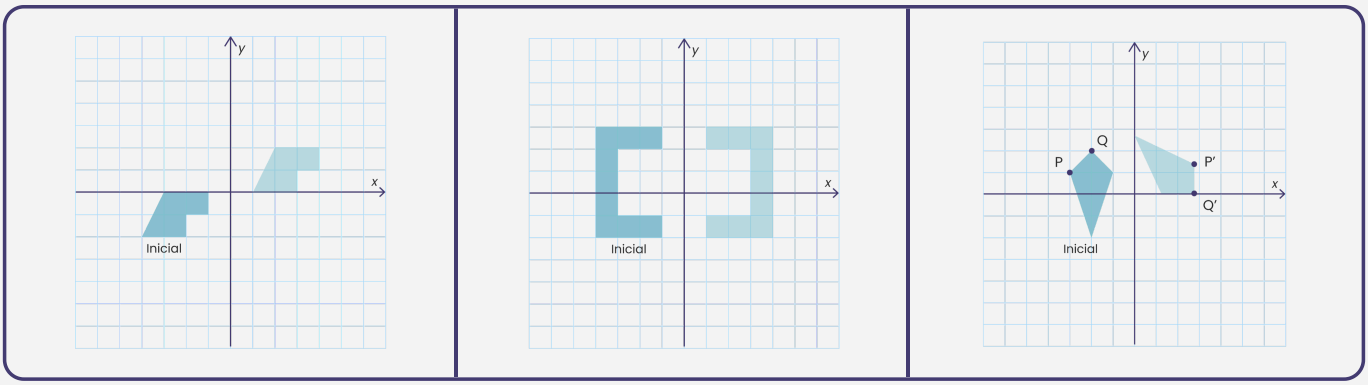
Anticipaciones y sugerencias

Para motivar que surja la estrategia de pensar en las preimágenes de la transformación puede sugerir a los estudiantes que primero dibujen las piezas faltantes y luego que determinen cuáles serían sus preimágenes bajo una rotación o una reflexión.

Para apoyar la comprensión de la idea de transformación inversa puede mostrar ejemplos con figuras geométricas o bien, representarlas con algún objeto o material concreto, que les permita reconocer un "camino de regreso a la ubicación inicial".

TICKET DE SALIDA

Identifica la transformación inversa a la que se muestra en cada caso, y nombra sus elementos (eje, centro, ángulo, vector, cuando corresponda).



Indicador de evaluación	Identificar transformaciones inversas a las transformaciones dadas gráficamente.

Posibles comprensiones

Afirmación	Respuesta correcta	Posibles comprensiones asociadas al error
a.	Traslación inversa, según el vector $\vec{u} = (—5, -2)$	Identifica el vector de traslación $(5, 2)$ y no el de su inversa.
b.	Reflexión respecto del eje y.	Dado que la figura tiene simetría respecto a un eje paralelo al x, el estudiante puede indicar que se trata de una reflexión respecto de dicho eje, sin embargo, eso no es correcto.
c.	Rotación con centro en O y ángulo de 240°.	Identifica el ángulo de rotación como 45°, y no el de su inversa 225°, o bien, 45° en sentido horario.

CIERRE DE LECCIÓN

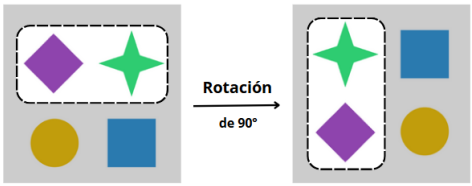
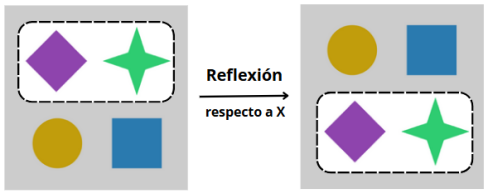
En esta lección:

- Aprendimos que a las transformaciones que tienen el mismo efecto sobre una figura le denominamos **transformaciones equivalentes** . Dos transformaciones son equivalentes **sólo si es que su efecto es equivalente para cualquier figura**.

  En el siguiente ejemplo, se evidencia que una reflexión con respecto al eje x en no es equivalente a un rotación en 90°.

Figura Inicial	Rotación 90°	Reflexión eje x
		
		

- Identificamos que la rotación y reflexión producen cambios distintivos en la figura que sirven de apoyo para identificar las transformaciones que pueden estar involucradas en una composición.

	
La rotación en 90° puede verse como un intercambio entre filas y columnas.	Las reflexiones con respecto a X (e Y) pueden visualizarse como un cambio en el orden de las filas (o columnas).

- Exploramos la noción de **transformación inversa** de una transformación, es aquella que "deshace" los cambios de una transformación o de una composición de transformaciones.

Términos matemáticos que ahora puedo ocupar:

- Transformación equivalente
- Teselado
- Transformación inversa